

64. ročník Matematickej olympiády, 2014/2015

Úlohy krajského kola kategórie A

1. Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole C . Os o_1 úsečky AC pretína stranu AB v bode K , os o_2 úsečky BC pretína stranu AB v bode L . Priesečník osí o_1 a o_2 označme O . Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka KLC leží na kružnici opísanej trojuholníku OKL .
2. Nájdite všetky dvojice prvočísel (p, q) také, že hodnota výrazu $p^2 + 5pq + 4q^2$ je druhou mocninou celého čísla.
3. Pre kladné reálne čísla a, b, c platí

$$ab + bc + ca = 16, \quad a \geq 3.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $2a + b + c$.

4. Majme n bodov v rovine, $n \geq 3$, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Uvažujme vnútorné uhly všetkých trojuholníkov s vrcholmi v daných bodoch a veľkosť najmenšieho z nich označme φ . Pre dané n nájdite najväčšie možné φ .

Krajské kolo kategórie A sa koná

v utorok 13. januára 2015

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015