

64. ročník Matematickej olympiády, 2014/2015

Úlohy krajského kola kategórie B

1. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15} . Určte n .
2. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1 + 2x^2},$$

pričom x je ľubovoľné reálne číslo. Pre ktoré x výraz V túto hodnotu nadobúda?

3. Dokážte, že priesečník výšok a ťažisko daného ostrouhlého trojuholníka ABC majú rovnakú vzdialenosť od strany AB práve vtedy, keď pre vnútorné uhly α , β pri vrcholoch A , B platí rovnosť $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 3$.
4. Na tabuli je zoznam čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča.

Krajské kolo kategórie B sa koná

v utorok 31. marca 2015

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Roman Soták, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Stanislav Krajčí, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015