65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

---

1. *Prvočíslo nazveme pekné, ak sa dá zapísať ako rozdiel dvoch tretích mocnín prirodzených čísel. Určte posledné cifry všetkých pekných prvočísel.*

(*Patrik Bak, Michal Rolínek*)

Riešenie. Najskôr si všimnime, že $5^3 - 4^3 = 61$, $2^3 - 1^3 = 7$ a $3^3 - 2^3 = 19$ sú pekné prvočísla, takže 1, 7 a 9 patria medzi hľadané posledné cifry. Ukážeme, že iné cifry na poslednom mieste byť nemôžu.

Zvoľme pekné prvočíslo p a zapíšme ho ako $m^3 - n^3$, pričom $m > n$ sú prirodzené čísla. Podľa známeho vzorca potom

$$p = m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2),$$

a keďže druhá zátvorka je väčšia ako 1, musí byť $m = n + 1$ (inak by sa prvočíslo p dalo rozložiť na súčin dvoch činiteľov väčších ako 1). Po dosadení vyjde

$$p = 3n^2 + 3n + 1. \tag{1}$$

Keďže $3n^2 + 3n + 1 > 6$, musí byť prvočíslo p nepárne a rôzne od 5. Tým sme vylúčili 0, 2, 4, 5, 6 a 8 ako možné posledné cifry, a ostáva tak už len vylúčiť cifru 3.

Na to stačí zistiť, aké zvyšky po delení piatimi dávajú čísla tvaru $3n^2 + 3n + 1$. Dosadením jednotlivých zvyškov 0, 1, 2, 3 a 4 do (1) postupne vyjdú zvyšky 1, 2, 4, 2, 1, čím je zvyšok 3 vylúčený.

Odpoveď. Posledné cifry pekných prvočísel sú 1, 7 a 9.

Poznámka. Odvodenie vzťahu (1) nie je nevyhnutné. Po zistení poznatku $m = n + 1$ stačí totiž určiť možné cifry rozdielov tretích mocnín dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel. Na to najskôr zostavíme tabuľku posledných cifier čísel k a k^3:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Vidíme, že posledné cifry rozdielov $(k + 1)^3 - k^3$ sú

$$1 - 0,\ 8 - 1,\ 17 - 8,\ 14 - 7,\ 5 - 4,\ 6 - 5,\ 13 - 6,\ 12 - 3,\ 9 - 2,\ 10 - 9,$$

teda jedine cifry 1, 7 a 9. (Aj tak je ale nutné uviesť príklady pekných prvočísel s týmito poslednými ciframi.)

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za nájdenie pekných prvočísel končiacich každou z cifier 1, 7 a 9 dajte spolu 1 bod. Akýkoľvek správny argument vedúci k vylúčeniu každej z cifier 0, 2, 4, 5, 6 a 8 oceňte tiež jedným bodom. Ďalšie dva body dajte za odvodenie, že hľadané prvočísla majú tvar $3n^2 + 3n + 1$. Zvyšné dva body potom za dokončenie riešenia. Pri postupe z poznámky naopak 1 bod strhnite, ak riešiteľ neuvedie zodpovedajúce príklady pekných prvočísel.

2. *Kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti*

$$a = c + \frac{1}{d} \qquad \text{a} \qquad b = d + \frac{1}{c}.$$

Dokážte nerovnosť $ab \geqq 4$ a nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $ab + cd$.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Pre dôkaz nerovnosti $ab \geqq 4$ dosaďme zo zadaných vzťahov. Získame tak odhad

$$ab = \left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{c}\right) = cd + 1 + 1 + \frac{1}{cd} \geqq 4,$$

pričom sme v poslednej nerovnosti využili známy fakt, že pre kladné čísla x (teda aj pre $x = cd > 0$) platí $x + 1/x \geqq 2$.

V druhej časti úlohy budeme postupovať podobne. Dosadením za a a b vyjde

$$ab + cd = \left(2 + cd + \frac{1}{cd}\right) + cd = 2 + 2cd + \frac{1}{cd}.$$

Tentoraz využijeme nerovnosť $x + y \geqq 2\sqrt{xy}$, ktorá platí pre ľubovoľné nezáporné čísla x, y. Keď v nej zvolíme $x = 2cd$, $y = 1/cd$, dostaneme

$$2cd + \frac{1}{cd} \geqq 2\sqrt{2}.$$

Vidíme, že $ab+cd \geqq 2(1+\sqrt{2})$. Aby sme sa presvedčili, že sa jedná o hľadané minimum, nájdeme prípustné hodnoty čísel a, b, c, d, pre ktoré v tejto nerovnosti nastane rovnosť.

Vyjdeme z toho, že v použitej nerovnosti nastáva rovnosť práve vtedy, keď $x = y$, čiže $2cd = 1/cd$, čo možno upraviť na $(cd)^2 = 1/2$. To zabezpečíme napríklad voľbou $c = 1$, $d = \sqrt{2}/2$ a k týmto hodnotám potom zo zadaných vzťahov dopočítame $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1+\sqrt{2}/2$. Zostrojená štvorica tak spĺňa podmienky zo zadania a zároveň pre ňu platí $ab + cd = 2(1 + \sqrt{2})$. Môžeme si teda byť istí tým, že hodnota $2(1 + \sqrt{2})$ je hľadaným minimom výrazu $ab + cd$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za riešenie prvej časti dajte dva body. V časti druhej dajte tri body za dôkaz nerovnosti $ab + cd \geqq 2(1 + \sqrt{2})$ a jeden bod za zostrojenie štvorice hodnôt a, b, c, d, pre ktorú je $ab + cd = 2(1 + \sqrt{2})$. Použité nerovnosti $x + 1/x \geqq 2$ a $x + y \geqq 2\sqrt{xy}$ (z ktorých prvá vyplýva z druhej voľbou $y = 1/x$) nie je nutné dokazovať, stačí ich buď označiť za známe, alebo sa odvolať na nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch čísel.

---

3. *Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), v ktorom platí $|BC| = |AB| + |CD|$. Dokážte, že*

a) na ramene AD leží nejaký bod kružnice majúcej priemer BC,

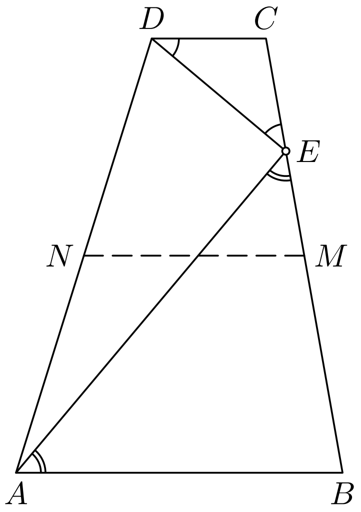
b) na ramene BC leží nejaký bod kružnice majúcej priemer AD.

(*Josef Tkadlec*)

Riešenie. a) Označme M, N postupne stredy ramien BC, AD. Ukážeme, že bod N leží na kružnici s priemerom BC.

Dosadením danej rovnosti do známeho vzťahu pre strednú priečku lichobežníka získame rovnosť
$$|MN| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{1}{2}|BC|.$$
To znamená, že vzdialenosť bodu N od stredu M kružnice s priemerom BC je rovná jej polomeru. Bod N je teda bodom kružnice s priemerom BC.

b) Vzhľadom na zadanú podmienku existuje na strane BC bod E taký, že $|BE| = |AB|$ a $|EC| = |CD|$ (obr. 1). Ukážeme, že platí $|\measuredangle AED| = 90°$, a bod E potom bude oným hľadaným bodom na Tálesovej kružnici nad priemerom AD.



Obr. 1

To však vyplýva priamo z rovnoramennosti trojuholníkov ABE, ECD a rovnobežnosti priamok AB a CD:
$$\begin{aligned}|\measuredangle AED| &= 180° - |\measuredangle AEB| - |\measuredangle CED| =\\ &= \tfrac{1}{2}\big((180° - 2|\measuredangle AEB|) + (180° - 2|\measuredangle CED|)\big) =\\ &= \tfrac{1}{2}(|\measuredangle ABE| + |\measuredangle DCE|) = 90°.\end{aligned}$$
Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Ak začneme celé riešenie priamo dôkazom, že trojuholník AED je pravouhlý, môžeme si potom uvedomiť, že navzájom kolmé osi jeho strán AE a ED prechádzajú stredom N jemu opísanej kružnice. To však znamená, že aj trojuholník BCN je pravouhlý, takže kružnica nad priemerom BC prechádza stredom N strany AD.

Za úplné riešenie každej z častí dajte 3 body. V časti a) dajte jeden bod, ak žiak definuje bod N a zároveň prejaví úmysel ukázať, že leží na kružnici s priemerom BC. Zvyšné dva body dajte, ak sa mu to podarí. Časť b) obodujte analogicky. V prípade, že sa žiak pustí inou cestou, majte na pamäti, že pre riešenie každej z častí je nutné využiť podmienku zo zadania. Bez nej totiž ani jeden zo záverov vo všeobecnosti neplatí.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015