

65. ročník Matematickej olympiády, 2015/2016

Úlohy školského kola kategórie A

1. Prvočíslo nazveme *pekné*, ak sa dá zapísať ako rozdiel dvoch tretích mocnín prirodzených čísel. Určte posledné cifry všetkých pekných prvočísel.
2. Kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti

$$a = c + \frac{1}{d} \quad \text{a} \quad b = d + \frac{1}{c}.$$

Dokážte nerovnosť $ab \geq 4$ a nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $ab + cd$.

3. Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), v ktorom platí $|BC| = |AB| + |CD|$.
Dokážte, že
 - a) na ramene AD leží nejaký bod kružnice majúcej priemer BC ,
 - b) na ramene BC leží nejaký bod kružnice majúcej priemer AD .

Školské kolo kategórie A sa koná

v utorok 8. decembra 2015

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 16. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015