65. ročník Matematickej olympiády 2015/2016 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *V každej zo štyroch miestností je niekoľko predmetov. Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo. Jednu n-tinu predmetov z prvej miestnosti prenesieme do druhej miestnosti. Následne jednu n-tinu (z nového počtu) predmetov prenesieme z druhej miestnosti do tretej. Podobne potom z tretej miestnosti do štvrtej a zo štvrtej do prvej. (Vždy pritom prenášame celé predmety.) Ak viete, že na konci bol v každej miestnosti rovnaký počet predmetov, určte, koľko najmenej predmetov mohlo byť na začiatku v druhej miestnosti. Pre ktoré n sa tak môže stať?* (*Vojtech Bálint, Michal Rolínek*)

Riešenie. Pri analýze počtu predmetov po jednotlivých krokoch budeme postupovať „odzadu". Ukážeme najskôr, ako možno z počtov predmetov v dvoch miestnostiach po odovzdávke určiť počty predmetov pred ňou. Povedzme, že v miestnostiach A a B je pred odovzdávkou z A do B postupne a a b predmetov. Tieto počty po odovzdávke označme a', b'. Podľa zadania platí

$$a' = \frac{n-1}{n}a, \qquad b' = b + \frac{1}{n}a.$$

Z prvej rovnosti a následne zo vzťahu $a + b = a' + b'$ nájdeme

$$a = \frac{n}{n-1}a', \qquad b = b' - \frac{1}{n-1}a'.$$

Označme teraz M počet predmetov nachádzajúcich sa na konci v každej zo štyroch miestností. Opakovaným použitím odvodeného vzťahu $(a', b') \to (a, b)$ sa dopracujeme až k vyjadreniu počiatočných počtov pomocou hodnôt M a n:

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Na konci:} & M, & M, & M, & M; \\[4pt]
\text{pred } 4 \to 1: & \dfrac{n-2}{n-1}M, & M, & M, & \dfrac{n}{n-1}M; \\[4pt]
\text{pred } 3 \to 4: & \dfrac{n-2}{n-1}M, & M, & \dfrac{n}{n-1}M, & M; \\[4pt]
\text{pred } 2 \to 3: & \dfrac{n-2}{n-1}M, & \dfrac{n}{n-1}M, & M, & M; \\[4pt]
\text{pred } 1 \to 2: & \dfrac{n(n-2)}{(n-1)^2}M, & \dfrac{(n-1)^2+1}{(n-1)^2}M, & M, & M.
\end{array}$$

Keďže bol počet predmetov v prvej miestnosti na začiatku kladný, musí byť $n \geqq 3$. Teraz už ľahko určíme najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$V_2 = \frac{(n-1)^2+1}{(n-1)^2}M.$$

Čitateľ a menovateľ zlomku sa líšia o jedna, a teda zlomok sa nedá krátiť. Ak má vyjsť celé číslo, musí nutne byť $M = k \cdot (n-1)^2$ pre vhodné k, a preto $V_2 = k\big((n-1)^2+1\big)$. Pre $n \geqq 3$ je však $(n-1)^2 + 1 \geqq 5$, preto aj $V_2 \geqq 5$. Voľbou $n = 3$, $k = 1$ a $M = 4$

potom dosiahneme hodnotu $V_2 = 5$, pričom sa ľahko presvedčíme, že zodpovedajúca štvorica $(3,5,4,4)$ vyhovuje podmienkam úlohy: po jednotlivých odovzdávkach z nej dostaneme štvoricu $(2,6,4,4)$, potom $(2,4,6,4)$, potom $(2,4,4,6)$ a napokon $(4,4,4,4)$. Hľadaný minimálny počet predmetov v druhej miestnosti je teda naozaj 5 a možno ho dosiahnuť iba pre $n = 3$, pretože pre $n \geqq 4$ je $V_2 \geqq 3^2 + 1 = 10$.

Iné riešenie. Označme počiatočné počty predmetov v miestnostiach postupne a, b, c, d a rad za radom určujme počty predmetov v jednotlivých miestnostiach po jednotlivých odovzdávkach.

$$\begin{array}{rllll} \text{Na začiatku:} & a, & b, & c, & d; \\ \text{po } 1 \to 2\text{:} & \dfrac{n-1}{n}a, & b + \dfrac{a}{n}, & c, & d; \\ \text{po } 2 \to 3\text{:} & \dfrac{n-1}{n}a, & \dfrac{n-1}{n}\left(b + \dfrac{a}{n}\right), & c + \dfrac{1}{n}\left(b + \dfrac{a}{n}\right), & d. \end{array}$$

Pre zjednodušenie označme $t = b + a/n$ (zdôraznime, že t je celé). Po ďalšom kroku $3 \to 4$ dostaneme štvoricu počtov

$$\frac{n-1}{n}a, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}\left(c + \frac{t}{n}\right), \quad d + \frac{1}{n}\left(c + \frac{t}{n}\right).$$

Keďže sa počty predmetov v druhej a tretej miestnosti už ďalej nebudú meniť, môžeme ich porovnať už teraz a zistiť tak, že

$$t = c + \frac{t}{n}, \quad \text{čiže} \quad c = \frac{n-1}{n}t.$$

Keďže n a $n-1$ sú nesúdeliteľné čísla, usúdime, že n delí t.

Po dosadení za c môžeme štvoricu po tretej odovzdávke prepísať na

$$\frac{n-1}{n}a, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad d + \frac{t}{n},$$

a preto po poslednom kroku $4 \to 1$ dôjdeme ku štvorici

$$\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}\left(d + \frac{t}{n}\right), \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}\left(d + \frac{t}{n}\right).$$

Keďže sa má jednať o štyri rovnaké čísla, porovnaním tretieho a štvrtého z nich zistíme, že

$$t = d + \frac{t}{n}, \quad \text{čiže} \quad d = \frac{n-1}{n}t.$$

Vďaka tomu môžeme záverečnú štvoricu ešte zjednodušiť na

$$\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t.$$

To sú štyri rovnaké čísla práve vtedy, keď platí

$$\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}t = \frac{n-1}{n}t, \quad \text{čiže} \quad a = \frac{n-2}{n-1}t.$$

Keďže $a > 0$, je nutne $n \geqq 3$. Navyše z nesúdeliteľnosti čísel $n-1$ a $n-2$ vyplýva, že $n-1$ delí t. Zo vzťahu $t = b + a/n$ možno teraz aj b vyjadriť iba pomocou t a n ako

$$b = \frac{(n-1)^2+1}{n(n-1)}t.$$

Ako už vieme, obe nesúdeliteľné čísla n a $n-1$ delia číslo t, takže ho delí aj ich súčin, a preto $t \geqq n(n-1)$. Vzhľadom na $n \geqq 3$ tak získavame odhad

$$b = (\underbrace{(n-1)^2}_{\geqq 4}+1) \cdot \underbrace{\left(\frac{t}{n(n-1)}\right)}_{\geqq 1} \geqq 5,$$

pričom rovnosť zrejme nastáva jedine pre $n = 3$ a $t = 6$. Pre také n, t (zodpovedajúce minimálnemu $b = 5$) zo skôr odvodených vzťahov dopočítame, že $a = 3$, $c = d = 4$. Skúška vďaka uvedenému postupu nie je nutná.

Odpoveď. V druhej miestnosti muselo byť minimálne päť predmetov a mohlo sa tak stať iba v prípade $n = 3$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Prirodzené čísla a, b nazveme nesúdeliteľné, ak je ich najväčší spoločný deliteľ rovný 1, teda $\mathrm{nsd}(a,b) = 1$. Pripomeňte si základné vlastnosti nesúdeliteľných čísel:
  a) Po sebe idúce prirodzené čísla sú nesúdeliteľné.
  b) Ak sú $a, b, c \in \mathbb{N}$ a ak platí $\mathrm{nsd}(a,b) = 1$ a $b \mid ac$, tak platí aj $b \mid c$.
  c) Ak sú $a, b, c \in \mathbb{N}$ a ak platí $\mathrm{nsd}(a,b) = 1$, $a \mid c$ a $b \mid c$, tak platí aj $ab \mid c$.

N2. Riešte podobnú úlohu pre tri miestnosti namiesto štyroch.

---

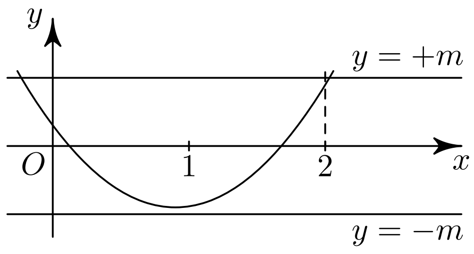
2. *Nájdite najmenšie reálne číslo m, pre ktoré možno nájsť reálne čísla a, b tak, aby nerovnosť*

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

platila pre každé $x \in \langle 0, 2\rangle$. (*Leo Boček*)

Riešenie. Na úvod si uvedomme, že žiadne záporné číslo m požiadavkám úlohy zjavne nevyhovuje (absolútna hodnota je nezáporné číslo).

Úlohu interpretujme geometricky. Podmienka zo zadania hovorí, že graf nejakej kvadratickej funkcie $y = x^2 + ax + b$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$ má ležať v horizontálnom páse medzi priamkami $y = +m$ a $y = -m$ (obr. 1). Otázka tak znie: Do akého nejtenšieho pásu tohto druhu možno graf nejakej takej funkcie na intervale $\langle 0, 2\rangle$ „zovrieť“?



Obr. 1

Dobrým kandidátom na najtenší pás sa podľa obr. 1 zdá byť funkcia

$$f(x) = (x-1)^2 - \tfrac{1}{2} = x^2 - 2x + \tfrac{1}{2},$$

pre ktorú $a = -2$ a $b = \frac{1}{2}$ a ktorá, ako hneď ukážeme, na intervale $\langle 0, 2\rangle$ spĺňa nerovnosti $-\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq \frac{1}{2}$.

Naozaj, vďaka vyjadreniu $f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}$ sa jedná o nerovnosti $0 \leqq (x-1)^2 \leqq 1$, ktoré platia súčasne práve pre $x \in \langle 0, 2\rangle$. Kvadratická funkcia $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ teda vyhovuje podmienke úlohy pre $m = \frac{1}{2}$.

V druhej časti riešenia ukážeme, že pre žiadne $m < \frac{1}{2}$ vyhovujúca kvadratická funkcia neexistuje.

Kľúčovým faktom pre nás bude, že pre ľubovoľnú funkciu $f(x) = x^2 + ax + b$ je aspoň jeden z rozdielov $f(0) - f(1)$ a $f(2) - f(1)$ väčší či rovný jednej. Z toho vyplynie, že šírka $2m$ zvierajúceho pásu[1] musí byť väčšia alebo rovná jednej, a hodnoty $m < \frac{1}{2}$ tak naozaj môžeme vylúčiť. Ak je totiž napríklad $f(0) - f(1) \geqq 1$ (v prípade $f(2) - f(1) \geqq 1$ by sme postupovali podobne), dostaneme želaný odhad $2m \geqq 1$ ľahko zo všeobecne platnej trojuholníkovej nerovnosti $|a - b| \leqq |a| + |b|$:

$$1 \leqq |f(0) - f(1)| \leqq |f(0)| + |f(1)| \leqq 2m.$$

Na zakončenie celého riešenia preto ostáva dokázať platnosť aspoň jednej z nerovností $f(0) - f(1) \geqq 1$ a $f(2) - f(1) \geqq 1$ pre ľubovoľnú $f(x) = x^2 + ax + b$. Keďže

$$f(0) = b, \quad f(1) = 1 + a + b, \quad f(2) = 4 + 2a + b,$$

platí

$$\begin{aligned} f(0) - f(1) &= -1 - a \geqq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a \leqq -2, \\ f(2) - f(1) &= 3 + a \geqq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a \geqq -2. \end{aligned}$$

Aspoň jedna z nerovností $f(0) - f(1) \geqq 1$ či $f(2) - f(1) \geqq 1$ teda platí vždy (bez ohľadu na voľbu čísel a, b).

Odpoveď. Hľadaná minimálna hodnota m je $\frac{1}{2}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte najmenšie reálne číslo m, pre ktoré platí $|x^2 - 2| \leqq m$ pre každé $x \in \langle -2, 2\rangle$.

N2. Ukážte, že pre každú funkciu $f(x) = x^2 + ax + b$ existujú čísla $u, v \in \mathbb{R}$ také, že $f(x) = (x - u)^2 + v$. Graf každej takej funkcie je teda posunutím paraboly $y = x^2$.

N3. Sú dané tri reálne čísla a, b, c, pričom každé dve sa líšia aspoň o 1. Ukážte, že ak nejaké $m \in \mathbb{R}$ spĺňa $|a| \leqq m$, $|b| \leqq m$, $|c| \leqq m$, tak $m \geqq 1$.

N4. Dokážte, že pre ľubovoľnú funkciu tvaru $f(x) = x^2 + ax + b$ platí aspoň jedna z nerovností $f(-1) - f(0) \geqq 1$, $f(1) - f(0) \geqq 1$. Platí záver aj vtedy, keď nahradíme trojicu čísel -1, 0, 1 trojicou čísel $t - 1$, t, $t + 1$ pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$?

D1. Rozhodnite, či existujú čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ také, že rovnica $ax^2 + bx + c + t = 0$ má dva reálne korene, nech zvolíme parameter $t \in \mathbb{R}$ akokoľvek.

D2. Nech a, b, c sú reálne čísla. Dokážte, že aspoň jedna z rovníc

$$x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0,$$
$$x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0,$$
$$x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0,$$

má reálny koreň. [Ruská MO 2007. Uvážte, že stačí, aby niektorá z troch kvadratických funkcií z ľavých strán mala nekladnú hodnotu pre $x = 0$. Môže sa stať, že by hodnoty v nule vyšli všetky tri záporné?]

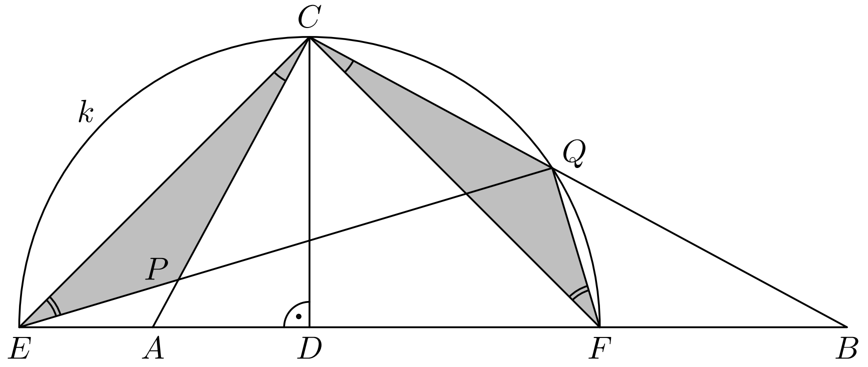
D3. Nech $P(x)$ a $Q(x)$ sú kvadratické trojčleny, pre ktoré platí, že rovnica $P(Q(x)) = 0$ má korene -22, 7, 13. Určte štvrtý koreň tejto rovnice, ak viete, že je celočíselný. [Ukážte, že z hodnôt $Q(-22)$, $Q(7)$, $Q(13)$ musia byť dve zhodné. Čo to potom znamená pre os súmernosti paraboly – grafu funkcie $Q(x)$?]

---

[1] Pozri geometrickú interpretáciu z úvodu riešenia.

3. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a dlhšou odvesnou BC. Nech D je päta výšky z vrcholu C. Kružnica k so stredom D a polomerom CD pretína odvesnu BC v bode Q a ďalej priamku AB v bodoch E a F ($E \neq F$), pričom F je bodom prepony AB. Úsečka QE pretína odvesnu AC v bode P. Dokážte, že $|PE| = |QF|$.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Vidíme, že daná kružnica k je Tálesovou kružnicou s priemerom EF a stredom D (obr. 2). Pritom trojuholník EFC je zrejme pravouhlý rovnoramenný, preto $|EC| = |FC|$. Ukážeme, že trojuholníky EPC a FQC sú zhodné, čím bude tvrdenie úlohy dokázané.



Obr. 2

Uhly CEQ a CFQ sú zhodné, pretože sa jedná o obvodové uhly nad tetivou CQ kružnice k. Napokon, oba uhly ECF a ACB sú zhodné (pravé), preto sú zhodné aj ich neprekrývajúce sa časti, čiže uhly ECA a FCB (a teda aj uhly ECP a FCQ). Trojuholníky EPC a FQC sa teda naozaj zhodujú podľa vety *usu*.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zopakujte si vetu o stredovom a obvodovom uhle.

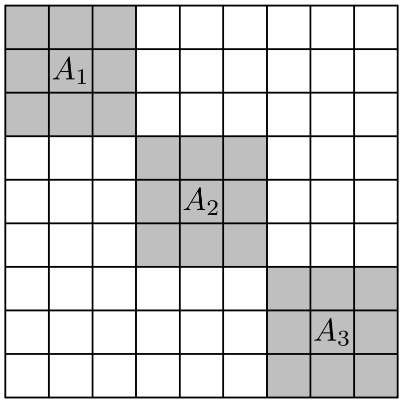
N2. Daný je štvorec $ABCD$. Na kratšom oblúku AB jemu opísanej kružnice zvolíme bod X tak, že $|\measuredangle ADX| = 30°$. Priesečníky úsečiek XC a XD so stranou AB označme postupne Y a Z. Určte veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku XYZ.

D1. Daný je štvorec $ABCD$. Na kratšom oblúku AB jemu opísanej kružnice zvolíme bod X. Priesečník úsečky XC so stranou AB označme Y a priesečník úsečky XD s uhlopriečkou AC označme Z. Dokážte, že $YZ \perp AC$. [Nájdite skrytú štvoricu bodov, ktoré ležia na jednej kružnici.]

D2. Na stranách BC a CD štvorca $ABCD$ zvoľme postupne body K a L tak, že $|\measuredangle LAK| = 45°$. Dokážte, že $|BK| + |DL| = |KL|$. [Otočte bod K o $90°$ okolo A a použite zhodnosti vhodných trojuholníkov.]

4. *Nela s Janou zvolia prirodzené číslo k a následne hrajú hru s tabuľkou majúcou rozmery 9×9. Začínajúca Nela vždy vo svojom ťahu vyberie jedno prázdne políčko a vpíše doňho nulu. Jana vo svojom ťahu do nejakého prázdneho políčka napíše jednotku. Navyše po každom ťahu Nely nasleduje k ťahov Jany. Ak sa kedykoľvek počas hry stane, že súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci je nepárny, vyhrá Jana. Ak dievčatá vyplnia celú tabuľku bez toho, aby sa tak stalo, vyhrá Nela. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú má Jana vyhrávajúcu stratégiu.* (Michal Rolínek)

Riešenie. Ukážeme najskôr, že v prípade $k = 3$ vyhrá Jana. Pracujme so štvorcami A_1, A_2 a A_3 o rozmeroch 3×3 (obr. 3). Štvorec 3×3 považujeme za *pokrytý*, ak sa nachádza v každom jeho riadku aj stĺpci práve jedna jednotka. Ak Jana pokryje štvorce A_1, A_2 a A_3 bez toho, aby zahrala do iných štvorcov, zabezpečí si výhru, pretože všetky riadkové aj stĺpcové súčty budú rovné nepárnemu číslu 1.



Obr. 3

Je zrejmé, že ak je po ťahu Nely v niektorom štvorci 3×3 zapísaná nanajvýš jedna nula (a žiadna jednotka), môže Jana vďaka hodnote $k = 3$ tento štvorec trojicou svojich ťahov pokryť. Stratégia Jany je teda nasledujúca: Ak Nela svojim ťahom zahrá do niektorého nepokrytého štvorca A_1, A_2 alebo A_3, pokryje vzápätí Jana tento štvorec. V opačnom prípade pokryje Jana ľubovoľný z doposiaľ nepokrytých štvorcov A_1, A_2 a A_3. Po prvých troch trojiciach ťahov Jana takto vždy vyhrá.

Tvrdíme, že v prípadoch $k \in \{1, 2\}$ má vyhrávajúcu stratégiu Nela. Najskôr si uvedomme, že ak nejaký ťah ponúka Jane výhru (nazvime ho *víťazný* ťah), znamená to, že pred jeho zahraním je nepárny súčet presne v ôsmich stĺpcoch aj ôsmich riadkoch, pričom onen víťazný ťah je ťahom Jany na priesečník jediného „párneho“ riadku s jediným „párnym“ stĺpcom. Z toho vyplýva, že ak má niekedy Jana víťazný ťah, je potom taký ťah presne jeden.

Teraz je zrejmé, ako Nela dosiahne výhru v prípade $k = 1$. Ak má Jana po svojom ťahu k dispozícii víťazný ťah, Nela na ono políčko napíše nulu, a Jana tak o svoju (jedinú) možnosť výhry v ďalšom ťahu príde. Ak naopak Jana nemá po svojom ťahu k dispozícii víťazný ťah, pripíše Nela ďalším ťahom nulu kamkoľvek. Tým sa súčty v riadkoch ani stĺpcoch nemenia, takže Jana ďalším ťahom nevyhrá. Takto Nela dosiahne vyplnenie celej tabuľky bez toho, aby Jane dovolila vyhrať.

V prípade $k = 2$ bude hrať Nela podľa rovnakej stratégie ako pri $k = 1$, a zabráni tak tomu, aby Jana mohla niekedy vyhrať po prvom zo svojej dvojice ťahov. V tom druhom však Jana nikdy vyhrať nemôže, lebo po jeho zahraní bude v tabuľke spolu párny počet jednotiek, a bude tak vylúčené, že by nepárny počet jednotiek bol v každom z (nepárneho počtu) deviatich riadkov.

Odpoveď. Najmenšia hodnota k, pre ktorú má Jana vyhrávajúcu stratégiu, je $k = 3$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Riešte danú hru najskôr v tabuľke 3×3.

N2. Na čarovnom strome vyrástlo 25 citrónov a 30 pomarančov. Sadár odtrhne každý deň dva plody, potom cez noc vždy na strome vyrastie jeden nový plod, a to pomaranč (resp. citrón), ak boli odtrhnuté plody rovnaké (resp. rôzne). Aký plod vyrastie na strome posledný? [Citrón – ich počet je totiž po každej noci nepárny.]

D1. Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leqq k \leqq 64$, vyberie Simona k políčok šachovnice 8×8 a každé z nich označí krížikom. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom vyplní tridsiatimi dvoma dominovými kockami. Ak je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky nepárny, vyhráva Lenka, inak vyhráva Simona. V závislosti od k určte, ktoré z dievčat má vyhrávajúcu stratégiu. [64–C–I–3]

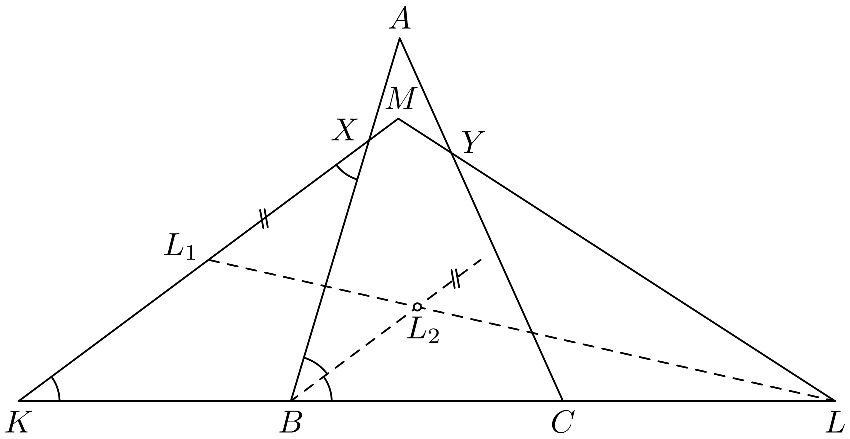
D2. V ľavom hornom rohu šachovnice 8×8 stojí figúrka kráľa. Dvaja hráči sa striedajú v ťahoch, pričom každý svojim ťahom (legálnym šachovým ťahom) posunie figúrku na miesto, na ktorom ešte nestála. Kto nemá kam urobiť ťah, prehral. Dokážte, že hráč hrajúci ako prvý má vyhrávajúcu stratégiu. [Rozdeľte šachovnicu na obdĺžničky 2×1 a nájdite pre prvého hráča stratégiu, v ktorej do žiadneho obdĺžnička neťahá ako prvý.]

D3. V ľavom hornom rohu šachovnice 8×8 stojí figúrka jazdca. Dvaja hráči sa striedajú v ťahoch, pričom každý svojim ťahom (legálnym šachovým ťahom) posunie figúrku na miesto, na ktorom ešte nestála. Kto nemá kam urobiť ťah, prehral. Dokážte, že začínajúci hráč má vyhrávajúcu stratégiu. [Rozdeľte šachovnicu na obdĺžničky 2×4 a v nich políčka rozdeľte do dvojíc s rovnakým úmyslom ako v úlohe D2.]

---

5. *Daný je trojuholník ABC s najkratšou stranou BC. Na stranách AB, AC a na polpriamkach opačných k polpriamkam BC, CB zvoľme postupne body X, Y, K, L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Priamky KX a LY sa pretínajú v bode M. Dokážte, že ťažisko trojuholníka KLM je totožné so stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABC.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Keďže uhol ABC je vonkajším uhlom rovnoramenného trojuholníka XKB s hlavným vrcholom B (obr. 4), je zrejme priamka KX rovnobežná s osou uhla ABC.



Obr. 4

Z hodnoty pomeru $|LB| : |LK| = 2 : 3$ potom ale vyplýva, že spomenutá os uhla ABC prechádza ťažiskom trojuholníka KLM. Ak totiž označíme LL_1 jeho ťažnicu a L_2 jej priesečník s osou uhla ABC, tak z podobnosti trojuholníkov LBL_2 a LKL_1 (podľa vety uu) získame

$$\frac{|LL_2|}{|LL_1|} = \frac{|LB|}{|LK|} = \frac{2}{3}.$$

Bod L_2 teda leží v dvoch tretinách ťažnice LL_1 od vrcholu L, takže je naozaj ťažiskom trojuholníka KLM.

Zo symetrie zadania úlohy vyplýva, že aj os uhla BCA prechádza ťažiskom trojuholníka KLM. Keďže priesečník osí vnútorných uhlov trojuholníka je stredom jeho kružnice vpísanej, je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že v každom trojuholníku ABC je os vnútorného uhla kolmá na os vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole.

N2. Daný je trojuholník ABC a jeho ťažisko T. Rovnobežka so stranou BC vedená bodom T oddelí menší trojuholník ADE. Určte, aký je pomer obsahov trojuholníkov ABC a ADE.

D1. V trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej a I_a stred kružnice pripísanej strane BC. Dokážte, že
   a) body B, C, I, I_a ležia na kružnici s priemerom II_a [použite výsledok úlohy N1],
   b) stred úsečky II_a leží na osi úsečky BC,

D2. c) body dotyku kružnice vpísanej a kružnice pripísanej strane BC so stranou BC sú súmerne združené podľa osi úsečky BC.

D3. Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole C. Os o_1 úsečky AC pretína stranu AB v bode K, os o_2 úsečky BC pretína stranu AB v bode L. Priesečník osí o_1 a o_2 označme O. Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka KLC leží na kružnici opísanej trojuholníku OKL. [64–A–II–1]

D4. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

---

6. *Na tabuli je napísaný súčin*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné za niektoré z činiteľov dopísať výkričník a nahradiť ich tak ich faktoriálmi, aby výsledný súčin bol rovný druhej mocnine prirodzeného čísla? (Michal Rolínek)

Riešenie. Exponent (prípadne aj nulový) prvočísla p v prvočíselnom rozklade čísla n budeme označovať $v_p(n)$. Uvedomme si niekoľko zrejmých poznatkov:

- ▷ Pre všetky m, n a každé prvočíslo p platí $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.
- ▷ Pre každé prvočíslo p platí $v_p(p!) = v_p(p) = 1$.
- ▷ Pre každé prvočíslo p platí $v_p((p+1)!) = 1$, $v_p(p+1) = 0$.
- ▷ Pre každé prvočíslo p a každé $n < p$ platí $v_p(n!) = v_p(n) = 0$.
- ▷ Číslo n je druhou mocninou prirodzeného čísla práve vtedy, keď $v_p(n)$ je párne pre každé prvočíslo p.

Označme $S = n!$ počiatočnú hodnotu súčinu na tabuli a S' jeho konečnú hodnotu po dopísaní faktoriálov. Vďaka uvedeným vlastnostiam funkcií v_p je jasné, že ak je n rovné nejakému prvočíslu p, tak bude platiť $v_p(S) = v_p(p!) = 1$ rovnako ako $v_p(S') = 1$, pretože pripisovanie faktoriálov zastúpenie prvočísla $p = n$ v súčine čísel na tabuli nezvýši. Číslo $v_p(S')$ tak bude nepárne, a preto S' nebude druhou mocninou prirodzeného čísla.

V druhej časti riešenia budeme naopak predpokladať, že dané číslo $n \geqq 2$ nie je prvočíslo (takže $n \geqq 4$), a ukážeme, že faktoriály môžeme pripísať tak, aby výsledný súčin

$$S' = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdots \cdot f_n,$$

pričom f_k je jedno z čísel k alebo $k!$ pre každé k, bol druhou mocninou prirodzeného čísla. To, ako vieme, nastane práve vtedy, keď v súčine S' bude každé prvočíslo p zastúpené s párnym exponentom $v_p(S')$. Keďže samo n podľa predpokladu prvočíslo nie je, súčin S' určite obsahuje iba prvočísla menšie ako n. Keďže každé také prvočíslo p

nie je zastúpené v činiteľoch $f_1, f_2, \dots, f_{p-1}$ vôbec a v činiteli f_p práve raz, príslušný mocniteľ $v_p(S')$ je rovnaký ako mocniteľ daného prvočísla p v „skrátenom“ súčine

$$p \cdot f_{p+1} \cdot f_{p+2} \cdot \dots \cdot f_n. \tag{1}$$

Ako teda zabezpečiť, aby každé prvočíslo $p < n$ bolo v zodpovedajúcom súčine (1) zastúpené s párnym exponentom? Keďže v druhom činiteli f_{p+1} z (1) je prvočíslo p zastúpené buď raz (to vtedy, keď $f_{p+1} = (p+1)!$), alebo zastúpené vôbec nie je (ak je naopak $f_{p+1} = p+1$), „správne“ zastúpenia p v súčine (1) môžeme zabezpečiť voľbou hodnoty f_{p+1}, nech sú nasledujúce hodnoty $f_{p+2}, \dots, f_n$ zadané akokoľvek.[2]

Z predchádzajúcej úvahy už vyplýva konštrukcia požadovaného výberu faktoriálov. Najskôr ľubovoľne zvolíme hodnoty $f_k \in \{k, k!\}$ pre všetky také $k \leqq n$, pre ktoré číslo $k-1$ *nie je prvočíslo*. Ostatné hodnoty f_k, teda hodnoty f_{p+1}, pričom p je ľubovoľné prvočíslo menšie ako n, potom budeme voliť „odzadu“, t. j. od najväčšieho takého p po najmenšie.[3] Vždy, keď bude pre niektoré prvočíslo $p < n$ na rade voľba hodnoty f_{p+1}, teda druhého činiteľa v súčine (1), budú už jeho ostatné činitele určené, a tak voľbu f_{p+1} urobíme „správne“ v zmysle predchádzajúceho odseku.

Tým je konštrukcia druhej mocniny S' zavŕšená a riešenie celej úlohy hotové.

Odpoveď. Hľadané $n \geqq 2$ sú práve všetky zložené čísla.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aký najmenší násobok čísla 2 016 je druhou mocninou prirodzeného čísla?

N2. Pre aké najmenšie prirodzené číslo n platí $2\,015 \mid n!$?

N3. Koľkými nulami končí číslo 2 015!?

N4. Pre dané prirodzené číslo n a prvočíslo p uvažujme najväčšie nezáporné celé číslo k, pre ktoré platí $p^k \mid n$. Toto číslo k budeme označovať $v_p(n)$ a hovoriť mu *p-valuácia* čísla n. Iný pohľad na vec je, že $v_p(n)$ označuje exponent prvočísla p v prvočíselnom rozklade čísla n. Pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b dokážte nasledujúce:
  a) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
  b) $v_p(a^b) = bv_p(a)$.
  c) Prirodzené číslo b je druhou mocninou práve vtedy, keď $v_p(b)$ je párne pre každé prvočíslo p.
  d) $a \mid b$ práve vtedy, keď $v_p(a) \leqq v_p(b)$ pre každé prvočíslo p.
  e) Ak je $v_p(a) \neq v_p(b)$, tak platí $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.

D1. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné za niektoré z činiteľov súčinu

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

dopísať výkričník tak, aby výsledný súčin alebo jeho dvojnásobok bol rovný *tretej* mocnine prirodzeného čísla. [Hľadané sú práve tie zložené n, pre ktoré je aj číslo $n-1$ zložené.]

D2. Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n a ľubovoľné prvočíslo p platí vzorec

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \ldots .$$

D3. Dokážte, že

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

[2] Platí to samozrejme aj pre prípadné prvočíslo $p = n-1$, keď je činiteľ $f_{p+1} = f_n$ v súčine (1) posledný; vtedy musíme prirodzene voliť $f_n = n!$.

[3] Posledná tak bude voľba f_3 zodpovedajúca najmenšiemu prvočíslu $p = 2$.

pričom $s_p(n)$ je ciferný súčet čísla n zapísaného v sústave so základom p. [Zapíšte n v sústave so základom p ako $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k$, použite výsledok D1 a pre určenie koeficientov pri každej z mocnín p potom sčítajte vhodnú geometrickú postupnosť.]

D4. Nájdite všetky prirodzené n, pre ktoré $2^{n-1} \mid n!$ [Použite výsledok predchádzajúcej úlohy.]

D5. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n je výraz

$$\frac{(2m)!(2n)!}{n!m!(m+n)!}$$

vždy rovný celému číslu. [MMO 1972]

D6. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n platí

$$v_p\left(\binom{n+m}{m}\right) = \frac{s_p(n) + s_p(m) - s_p(m+n)}{p-1},$$

pričom opäť $s_p(n)$ je ciferný súčet čísla n zapísaného v sústave so základom p. Súvisí výsledok s počtom „prenosov“ pri písomnom sčítaní v sústave so základom p?

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Roman Soták, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Tomáš Jurík, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015