65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky možné hodnoty súčinu prvočísel p, q, r, pre ktoré platí*

$$p^2 - (q + r)^2 = 637.$$

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

Riešenie. Ľavú stranu danej rovnice rozložíme na súčin podľa vzorca pre $A^2 - B^2$. V takto upravenej rovnici

$$(p + q + r)(p - q - r) = 637$$

už ľahko rozoberieme všetky možnosti pre dva celočíselné činitele naľavo. Prvý z nich je väčší a kladný, preto aj druhý musí byť kladný (lebo taký je ich súčin), takže podľa rozkladu na súčin prvočísel čísla $637 = 7^2 \cdot 13$ sa jedná o jednu z dvojíc $(637, 1)$, $(91, 7)$ alebo $(49, 13)$. Prvočíslo p je zrejme aritmetickým priemerom oboch činiteľov, takže sa musí rovnať jednému z čísel $\frac{1}{2}(637 + 1) = 319$, $\frac{1}{2}(91 + 7) = 49$, $\frac{1}{2}(49 + 13) = 31$. Prvé dve z nich však prvočísla nie sú ($319 = 11 \cdot 29$ a $49 = 7^2$), tretie áno. Takže nutne $p = 31$ a prislúchajúce rovnosti $31 + q + r = 49$ a $31 - q - r = 13$ platia práve vtedy, keď $q + r = 18$. Také dvojice prvočísel $\{q, r\}$ sú iba $\{5, 13\}$ a $\{7, 11\}$ (stačí prebrať všetky možnosti, alebo si uvedomiť, že jedno z prvočísel q, r musí byť aspoň $18 : 2 = 9$, nanajvýš však $18 - 2 = 16$). Súčin pqr tak má práve dve možné hodnoty, a to $31 \cdot 5 \cdot 13 = 2\,015$ a $31 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,387$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky prirodzené čísla a a b, pre ktoré je rozdiel $a^2 - b^2$ druhou mocninou niektorého prvočísla. [$a = (p^2 + 1)/2$ a $b = (p^2 - 1)/2$, pričom p je ľubovoľné nepárne prvočíslo.]

D1. Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. [59–C–S–3]

D2. Nájdite všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

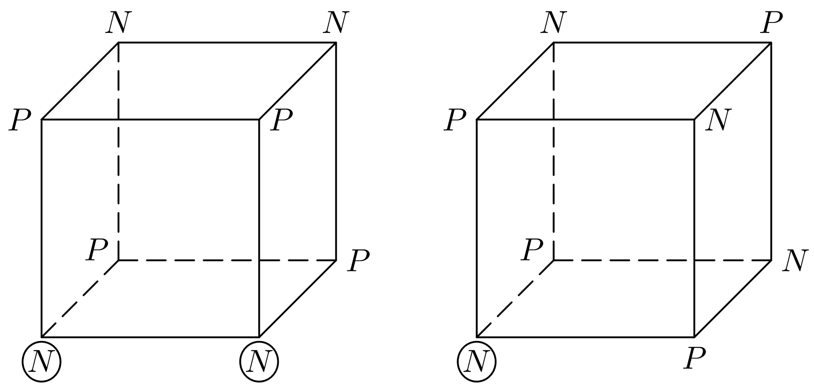
---

2. *Určte, koľkými spôsobmi možno k jednotlivým vrcholom kocky ABCDEFGH pripísať čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby súčin čísel pripísaných ľubovoľným trom vrcholom každej zo stien kocky bol párny.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Pre kontrolu dotyčnej podmienky stačí vedieť len to, ktorým vrcholom kocky $ABCDEFGH$ sú pripísané čísla nepárne a ktorým čísla párne. Zaveďme preto znaky N a P pre všetky nepárne, resp. párne čísla a riešme najskôr otázku, koľkými vyhovujúcimi spôsobmi môžeme pripísať k vrcholom kocky $ABCDEFGH$ štyri N a štyri P (práve toľko ich totiž je medzi zadanými číslami 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4).

Uvedomme si, čo podmienka úlohy hovorí o počte znakov N pripísaných vrcholom jednej a tej istej steny kocky: počet týchto N je nanajvýš 2 (súčin troch pripísaných N by bol totiž nepárny, teda v rozpore s danou podmienkou). Keď však danú stenu kocky zvážime súčasne so stenou s ňou rovnobežnou (t. j. stenou protiľahlou), pri ktorej vrcholoch sú tiež nanajvýš dve N, a zohľadníme pritom, že pri ôsmich vrcholoch týchto dvoch stien (teda pri všetkých ôsmich vrcholoch kocky) sú (všetky) štyri N, dôjdeme k záveru, že *pri vrcholoch každej steny sú práve dve N* (a teda aj dve P). Naopak, každé také pripísanie štyroch N a štyroch P zrejme vyhovuje požiadavkám úlohy.

Stojíme tak pred úlohou určiť počet tých pripísaní štyroch N a štyroch P vrcholom kocky $ABCDEFGH$, pri ktorých sú dve N a dve P pri vrcholoch každej steny. Rozdelíme ich na dve skupiny podľa toho, či existuje stena, na ktorej sú obe N priradené vrcholom susedným (na kocke tak vznikne aspoň jedna hrana „NN“), alebo naopak vo všetkých stenách sú obe N priradené vrcholom protiľahlým (všetky hrany kocky potom budú „NP“). Po jednom reprezentantovi oboch skupín vidíme na obr. 1 – pre lepší prehľad bez označenia vrcholov kocky písmenami. Ľahko overíme (výklad tu vynecháme), že znaky v krúžku pri reprezentantoch oboch skupín už jednoznačne určujú znaky pri všetkých ostatných vrcholoch kocky.



Obr. 1

Teraz už ľahko usúdime, že v prvej skupine je práve šesť priradení – jednou hranou „NN“ je totiž, ako vieme, celé vyhovujúce priradenie určené a má práve dve hrany „NN“, ktoré sú pritom rovnobežné a neležia v jednej stene; takých dvojíc hrán je pre kocku $ABCDEFGH$ práve šesť. Naproti tomu v druhej skupine sú iba dve rôzne priradenia – pretože sa jedná o priradenie bez hrany „NN“; znakom P alebo N pri vrchole A danej kocky sú totiž, ako vieme, určené znaky pri všetkých ďalších jej vrcholoch. Existuje tak spolu $6 + 2 = 8$ vyhovujúcich priradení štyroch N a štyroch P vrcholom kocky $ABCDEFGH$.

V ďalšej, jednoduchšej časti nášho postupu určíme, koľkými spôsobmi môžeme štyri N a štyri P (pevne pripísané vrcholom kocky) zameniť konkrétnymi číslami 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Máme zrejme práve štyri možnosti pre výber toho N, ktoré zameníme číslom 1; potom už zvyšné tri N musíme zameniť číslom 3, rovnako ako všetky štyri P číslom 4. Počet spôsobov zámen znakov N a P danými číslami je tak rovný 4.

Nakoniec uplatníme jednoduché kombinatorické *pravidlo súčinu*: keďže existuje osem vyhovujúcich pripísaní znakov N a P k vrcholom danej kocky a pri každom z nich možno štyrmi spôsobmi zameniť znaky N a P danými číslami, je hľadaný počet vyhovujúcich pripísaní daných čísel vrcholom danej kocky rovný $8 \cdot 4 = 32$.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Koľkými spôsobmi možno vrcholom štvorca $ABCD$ a jeho stredu P pripísať čísla 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby boli *naspospol nepárne* súčty čísel pri každej jeho strane aj oboch uhlopriečkach? Dokážete tento počet určiť bez toho, aby ste vypísali všetky možnosti a potom ich spočítali? [24 spôsobov. Najskôr pripíšte daným piatim bodom tri znaky N a dva znaky P pre nepárne, resp. párne čísla – to možno spraviť práve dvoma vyhovujúcimi spôsobmi. Potom uvážte, že znaky N možno zameniť danými číslami šiestimi spôsobmi a znaky P dvoma spôsobmi.]

D1. Určte, koľkými spôsobmi možno vrcholom pravidelného 9-uholníka $ABCDEFGHI$ priradiť čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bolo priradené inému vrcholu a aby súčet čísel priradených každým trom susedným vrcholom bol deliteľný tromi. [61–B–II–2]

---

3. *Uvažujme výraz*

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu.

b) Určte všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, pre ktoré je hodnota daného výrazu rovná číslu 16.

(*Aleš Kobza*)

Riešenie. Daný výraz $V(x, y)$ upravme podľa vzorcov pre $(A \pm B)^2$:

$$V(x, y) = \left(x^2 - 2xy + y^2\right) + \left(x^2 + 2x + 1\right) + 3 = (x - y)^2 + (x + 1)^2 + 3.$$

a) Prvé dva sčítance v poslednom súčte sú druhé mocniny, majú teda nezáporné hodnoty. Minimum určite nastane v prípade, keď pre niektoré x a y budú oba základy rovné nule (v tom prípade pre inú dvojicu základov už bude hodnota výrazu $V(x, y)$ väčšia). Obe rovnosti $x - y = 0$, $x + 1 = 0$ súčasne naozaj nastanú, a to zrejme iba pre hodnoty $x = y = -1$. Dodajme (na to sa zadanie úlohy nepýta), že $V_{\min} = V(-1, -1) = 3$.

Odpoveď. Daný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu iba pre $x = y = -1$.

b) Podľa úpravy z úvodu riešenia platí

$$V(x, y) = 16 \iff (x - y)^2 + (x + 1)^2 + 3 = 16 \iff (x - y)^2 + (x + 1)^2 = 13.$$

Oba sčítance $(x - y)^2$ a $(x + 1)^2$ sú (pre celé nezáporné čísla x a y) z množiny $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$. Jeden preto zrejme musí byť 4 a druhý 9. Vzhľadom na predpoklad $x \geqq 0$ je základ $x+1$ mocniny $(x+1)^2$ kladný, musí preto byť rovný 2 alebo 3 (a nie -2 či -3). V prvom prípade, t. j. pre $x = 1$, potom pre základ mocniny $(x - y)^2$ dostávame podmienku $1 - y = \pm 3$, teda $y = 1 \mp 3$, čiže $y = 4$ (hodnota $y = -2$ je zadaním časti b) vylúčená). V druhom prípade, keď $x = 2$, dostaneme podobne z rovnosti $x - y = 2 - y = \pm 2$ dve vyhovujúce hodnoty $y = 0$ a $y = 4$.

Odpoveď. Všetky hľadané dvojice (x, y) sú $(1, 4)$, $(2, 0)$ a $(2, 4)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z dokážte nezápornosť hodnoty každého z výrazov

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz,\ \ x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13,\ \ 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zistite tiež, kedy je dotyčná hodnota rovná nule.

D1. V obore celých čísel vyriešte rovnicu $x^2 + y^2 + x + y = 4$. [61–B–S–1]

D2. Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokážte, že potom platí aj $c^2 + ab \leqq ac + bc$. [63–C–II–3]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí $(a + bc)(b + ac) \geqq ab(c + 1)^2$. Zistite, kedy nastane rovnosť. [58–C–S–1]

D4. Uvažujme výraz $V(x) = (5x^4 - 4x^2 + 5)/(x^4 + 1)$.

a) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí $V(x) \geqq 3$.

b) Nájdite najväčšiu hodnotu $V(x)$. [58–C–II–1]

D5. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

4. *Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí*

$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

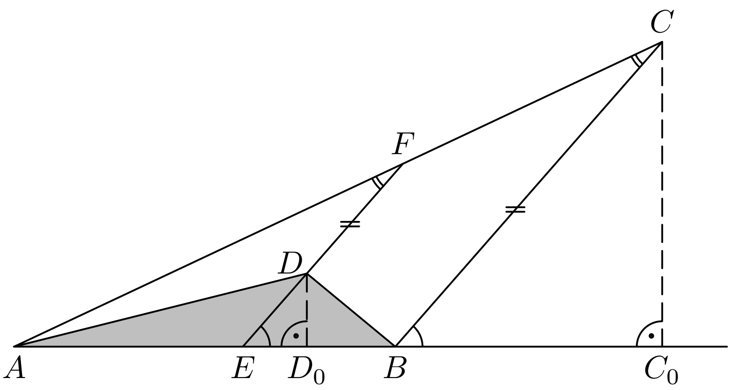
a) *Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.*
b) *Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4.*

(*Vojtěch Žádník*)

Riešenie. Pre spoločnú hodnotu p oboch pomerov zo zadania platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \tag{1}$$

Pred vlastným riešením oboch úloh a) a b) vyjadríme pomocou daného čísla p skúmaný pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD. Ten je rovný – keďže trojuholníky majú spoločnú stranu AB – pomeru dĺžok ich výšok CC_0 a DD_0 (obr. 2), ktorý je rovnaký ako



Obr. 2

pomer dĺžok úsečiek BC a ED, a to na základe podobnosti pravouhlých trojuholníkov BCC_0 a EDD_0 podľa vety *uu* (uplatnenej vďaka $BC \parallel ED$).[1] Platí teda rovnosť

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \tag{2}$$

Vráťme sa teraz k rovnostiam (1), podľa ktorých

$$|EF| = (1+p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1+p)|EA|,$$

a všimnime si, že trojuholníky ABC a AEF majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodné uhly pri vrcholoch C a F (pretože $BC \parallel EF$), takže sú podľa vety *uu* podobné. Preto pre dĺžky ich strán platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \quad \text{čiže} \quad 1+p = \frac{|BC|}{(1+p)|DF|}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BC| = (1+p)^2|DF|.$$

[1] V prípade pravých uhlov ABC a AED to platí triviálne, lebo vtedy $B = C_0$ a $E = D_0$.

Keď vydelíme posledný vzťah hodnotou $|ED|$, ktorá je rovná $p|DF|$ podľa (1), získame podiel z pravej strany (2) a tým aj hľadané vyjadrenie

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \tag{3}$$

a) Algebraickou úpravou zlomku zo vzťahu (3)

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

zisťujeme, že hodnota pomeru $S_{ABC} : S_{ABD}$ je pre akékoľvek dve navzájom prevrátené hodnoty p a $1/p$ rovnaká, teda nielen pre hodnoty $2/3$ a $3/2$, ako sme mali ukázať.

b) Podľa vzťahu (3) je našou úlohou overiť pre každé $p > 0$ nerovnosť

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geqq 4, \quad \text{čiže} \quad (1+p)^2 \geqq 4p.$$

To je však zrejme ekvivalentné s nerovnosťou $(1-p)^2 \geqq 0$, ktorá skutočne platí, nech je základ druhej mocniny akýkoľvek (rovnosť nastane jedine pre $p = 1$).

Dodajme, že pre iný dôkaz bolo možné využiť aj vyššie uvedené „symetrické“ vyjadrenie

$$\frac{(1+p)^2}{p} = 2+p+\frac{1}{p}$$

a uplatniť naň dobre známu nerovnosť $p + 1/p \geqq 2$, ktorej platnosť pre každé $p >$ > 0 vyplýva napr. z porovnania aritmetického a geometrického priemeru dvojice čísel p a $1/p$, nazývaného AG-nerovnosť:

$$\frac{1}{2}\Big(p+\frac{1}{p}\Big) \geqq \sqrt{p\cdot\frac{1}{p}} = 1, \quad \text{pretože všeobecne} \quad \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a\cdot b} \quad (\forall a, b \geqq 0).$$

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Vymyslite pravidlo, ako jednoducho vyjadriť pomer obsahov dvoch trojuholníkov, ktoré sa zhodujú v jednej strane či v jednej výške. Uplatnite ho potom na riešenie úloh N2 a N3.

N2. Uhlopriečky konvexného štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode P. Obsahy trojuholníkov ABP, BCP, CDP, DAP označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Dokážte všeobecnú rovnosť $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ a vysvetlite, prečo špeciálna rovnosť $S_2 = S_4$ nastane práve vtedy, keď $AB \parallel CD$. [Pri prvej rovnosti prejdite k úmere $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$, pri druhej k rovnosti obsahov trojuholníkov ABC a ABD.]

N3. Vnútri strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body K, L, M tak, že úsečky AK, BL, CM sa pretínajú v jednom bode P. Dokážte, že oba výrazy

$$\frac{|BK|}{|KC|}\cdot\frac{|CL|}{|LA|}\cdot\frac{|AM|}{|MB|} \quad \text{a} \quad \frac{|PK|}{|AK|}+\frac{|PL|}{|BL|}+\frac{|PM|}{|CM|}$$

sa rovnajú číslu 1. [Pre prvý výraz vyjadrite vhodne pomery obsahov trojuholníkov ABP, BCP a CAP. Keď potom vyjadríte, akými sú časťami obsahu celého trojuholníka ABC, a tieto tri zlomky sčítate, dostanete tvrdenie o hodnote druhého výrazu.]

D1. Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| =$ $= 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$. [64–C–I–4]

D2. Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC. [64–C–S–2]

D3. Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD. Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$. [55–C–II–1]

5. *Máme kartičky s číslami* $5, 6, 7, \ldots, 55$ *(na každej kartičke je jedno číslo). Koľko najviac kartičiek môžeme vybrať tak, aby súčet čísel na žiadnych dvoch vybraných kartičkách nebol palindróm? (Palindróm je číslo, ktoré je rovnaké pri čítaní zľava doprava i sprava doľava.)* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Aby sme sa mohli stručnejšie vyjadrovať, budeme vyberať priamo *čísla*, a nie *kartičky.*

Všimnime si najskôr, že pre súčet s ľubovoľných dvoch daných čísel platí $11 = 5 + 6 \leqq s \leqq 55 + 54 = 109$. Medzi číslami od 11 po 109 sú palindrómy práve *všetky* násobky 11 a navyše aj číslo 101. Uvedomme si teraz, že deliteľnosť súčtu dvoch čísel daným číslom d (nám pôjde o hodnotu $d = 11$) závisí iba na zvyškoch oboch sčítaných čísel po delení dotyčným d. Toto užitočné pravidlo uplatníme tak, že všetky dané čísla od 5 po 55 rozdelíme do skupín podľa ich zvyškov po delení číslom 11 a tieto skupiny zapíšeme do riadkov tak, aby súčet dvoch čísel z rôznych skupín na rovnakom riadku bol deliteľný číslom 11; o význame zátvoriek na konci každého riadku budeme hovoriť vzápätí.

$$
\begin{array}{rll}
\{5,16,27,38,49\}, & \{6,17,28,39,50\} & \text{(5 čísel)},\\
\{7,18,29,40,51\}, & \{15,26,37,48\} & \text{(5 čísel)},\\
\{8,19,30,41,52\}, & \{14,25,36,47\} & \text{(5 čísel)},\\
\{9,20,31,42,53\}, & \{13,24,35,46\} & \text{(5 čísel)},\\
\{10,21,32,43,54\}, & \{12,23,34,45\} & \text{(5 čísel)}\\
\multicolumn{3}{c}{\{11,22,33,44,55\} \quad \text{(1 číslo)}.}
\end{array}
$$

Na koniec každého riadku sme pripísali maximálny počet na ňom zapísaných čísel, ktoré môžeme súčasne vybrať bez toho, aby súčet dvoch z nich bol násobkom čísla 11. Napríklad v treťom riadku máme päticu čísel so zvyškom 8 a štvoricu čísel so zvyškom 3. Je jasné, že nemôžeme súčasne vybrať po čísle z oboch týchto skupín (ich súčet by bol násobkom 11), môžeme však vybrať súčasne všetkých päť čísel z pätice (súčet každých dvoch z nich bude po delení 11 dávať taký istý zvyšok ako súčet $8 + 8$, teda zvyšok 5). Dodajme ešte, že uvedená schéma šiestich riadkov má pre nás ešte jednu obrovskú výhodu: súčet žiadnych dvoch čísel z *rôznych* riadkov nie je násobkom 11 (tým totiž nie je ani súčet ich dvoch zvyškov).

Z uvedeného rozdelenia všetkých daných čísel do šiestich riadkov vyplýva, že vyhovujúcim spôsobom nemôžeme vybrať viac ako $5 \cdot 5 + 1 = 26$ čísel. Keby sme však vybrali 26 čísel, muselo by medzi nimi byť aj jedno z čísel 49 alebo 50 a z ďalších štyroch riadkov postupne čísla 51, 52, 53 a 54 – potom by sme ale dostali palindróm $49 + 52$ alebo $50 + 51$. A tak sa nedá vybrať viac ako 25 čísel, pritom výber 25 čísel možný je: z prvých piatich riadkov vyberieme napríklad všetky čísla z ľavých skupín s výnimkou čísla 52 a k tomu jedno číslo (napríklad 11) z posledného riadku. Potom súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebude deliteľný 11 (vďaka zaradeniu čísel do skupín), ani rovný poslednému „kritickému“ číslu, palindrómu 101 (preto sme pri voľbe čísla 49 vylúčili 52).

Odpoveď. Najväčší možný počet kartičiek, ktoré môžeme požadovaným spôsobom vybrať, je rovný číslu 25.

Iné riešenie. Medzi vybranými číslami môžu byť

- ▷ iba jedno číslo z pätice $(11, 22, 33, 44, 55)$;
- ▷ nanajvýš jedno číslo z každej z 20 nasledujúcich dvojíc $(5, 6)$, $(7, 15)$, $(8, 14)$, $(9, 13)$, $(10, 12)$, $(16, 17)$, $(18, 26)$, $(19, 25)$, $(20, 24)$, $(21, 23)$, $(27, 28)$, $(29, 37)$, $(30, 36)$, $(31, 35)$, $(32, 34)$, $(38, 39)$, $(40, 48)$, $(41, 47)$, $(42, 46)$ a $(43, 45)$;[2]
- ▷ nanajvýš dve čísla zo štvorice $(49, 50, 51, 52)$ (pretože súčty $49 + 50$, $50 + 51$ a $49 + 52$ sú palindrómy);
- ▷ obe zvyšné čísla 53 a 54.

Preto sa nedá požadovaným spôsobom vybrať viac ako $1 + 20 + 2 + 2 = 25$ čísel. Vyhovujúci výber 25 čísel je možný: jedno číslo z pätice násobkov 11, menšie z dvoch čísel z každej z 20 dvojíc, čísla 49 a 51 zo štvorice a napokon obe čísla 53 a 54. Je však nutné vysvetliť, prečo súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nie je násobkom 11 (prečo nie je rovný 101, je zrejmé hneď). Na to si stačí všimnúť, že menšie čísla z 20 dvojíc dávajú po delení jedenástimi postupne zvyšky, ktoré sa opakujú s periódou dĺžky 5 majúcou zloženie $(5, 7, 8, 9, 10)$, napokon posledné štyri vybrané čísla majú postupne zvyšky 5, 7, 9 a 10, takže súčet žiadnych dvoch zvyškov nami vybraných čísel naozaj nie je násobkom 11. (Zhodou okolností sa jedná o rovnaký príklad vyhovujúceho výberu 25 čísel ako v prvom riešení.)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje. [58–C–I–5]

D1. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ je vybraných niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.

a) Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.

b) Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26. [58–C–II–3]

---

6. *Daná je kružnica $k_1(A; 4\,\mathrm{cm})$, jej bod B a kružnica $k_2(B; 2\,\mathrm{cm})$. Bod C je stredom úsečky AB a bod K je stredom úsečky AC. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka KLM, ktorého vrchol L je jeden z priesečníkov kružníc k_1, k_2 a ktorého prepona KM leží na priamke AB.* (Šárka Gergelitsová)

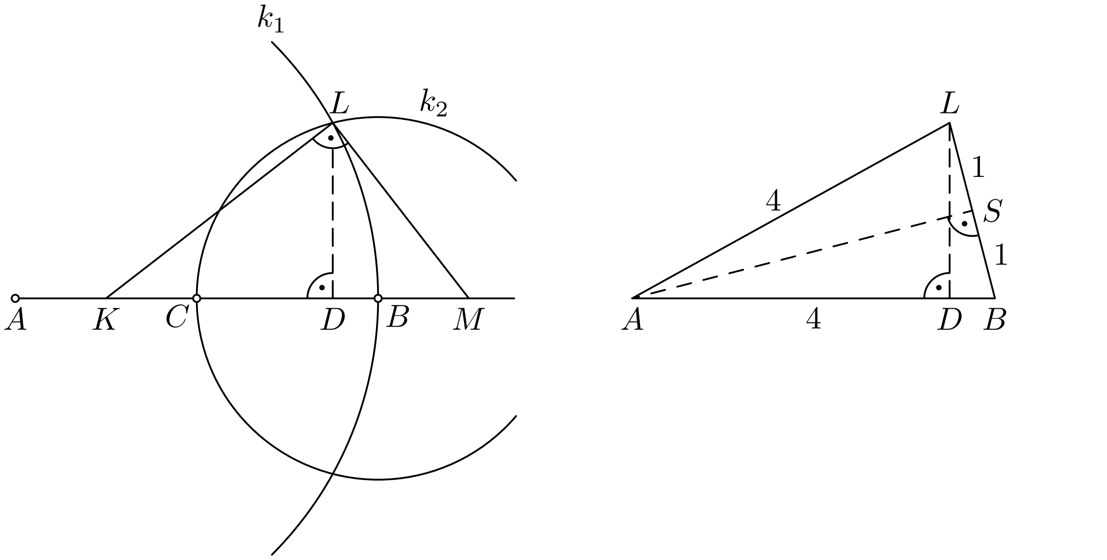
Riešenie. Poznamenajme predovšetkým, že vzhľadom na osovú súmernosť podľa priamky AB je jedno, ktorý z oboch priesečníkov kružníc k_1 a k_2 vyberieme za bod L.

Hľadaný obsah trojuholníka KLM vyjadríme nie pomocou dĺžok jeho odvesien KL a LM, ale pomocou dĺžok jeho prepony KM a k nej prislúchajúcej výšky LD (obr. 3 vľavo), teda použitím vzorca[3]

$$S_{KLM} = \frac{|KM| \cdot |LD|}{2}.$$

[2] Tieto dvojice so súčtami deliteľnými číslom 11 sme vytvorili postupne zo zvyšných čísel tak, že k najmenšiemu doposiaľ nezapísanému číslu sme pripojili ďalšie najmenšie doposiaľ nezapísané číslo, ktoré „dopĺňa" prvé číslo na nejaký násobok 11. Takému postupu sa najmä v matematickej informatike hovorí *pažravý algoritmus*.

[3] Výpočet dĺžky odvesny LM bez medzivýpočtu výšky LD je totiž prakticky nemožný.



Obr. 3

Na určenie vzdialeností bodu D od bodov B a L uvažujme ešte stred S úsečky BL (obr. 3 vpravo). Trojuholníky ASB a LDB sú oba pravouhlé so spoločným ostrým uhlom pri vrchole B. Sú preto podľa vety uu podobné, takže pre pomer ich strán platí (počítame s dĺžkami bez jednotiek, takže podľa zadania je $|AB| = 4$, $|BL| = 2$, a preto $|BS| = |BL|/2 = 1$)

$$\frac{|BD|}{|BS|} = \frac{|BL|}{|BA|} = \frac{2}{4}, \quad \text{odkiaľ} \quad |BD| = \frac{1}{2}|BS| = \frac{1}{2}.$$

Z Pytagorovej vety pre trojuholník LDB tak vyplýva[4]

$$|LD| = \sqrt{|BL|^2 - |BD|^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

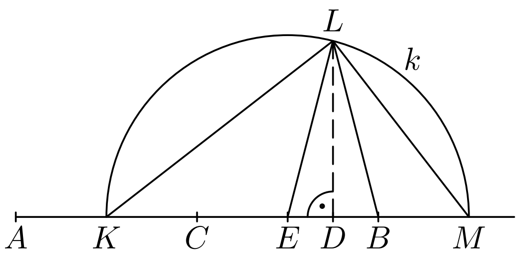
Z rovnosti $|BD| = 1/2$ už odvodíme aj dĺžku úseku KD prepony KM pravouhlého trojuholníka KLM: $|KD| = |AB| - |AK| - |BD| = 4 - 1 - 1/2 = 5/2$. Dĺžku druhého úseku DM teraz určíme z Euklidovej vety o výške, podľa ktorej $|LD|^2 = |KD| \cdot |DM|$. Dostaneme teda $|DM| = |LD|^2/|KD| = (15/4)/(5/2) = 3/2$, čiže celá prepona KM má dĺžku $|KM| = |KD| + |DM| = 5/2 + 3/2 = 4$. Dosadením do vzorca z úvodu riešenia tak dôjdeme k výsledku

$$S_{KLM} = \frac{|KM| \cdot |LD|}{2} = \frac{4 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{2}}{2} = \sqrt{15}.$$

Odpoveď. Trojuholník KLM má obsah $\sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2$.

[4] Inou možnosťou pre výpočet výšky LD na rameno AB rovnoramenného trojuholníka ABL je vypočítať jeho výšku AS na základňu BL (použitím Pytagorovej vety pre trojuholník ABS) a potom porovnať dvojaké vyjadrenie obsahu trojuholníka ABL cez jeho výšky AS a LD.

Iné riešenie. Keď narysujeme presne obe kružnice k_1, k_2 a zodpovedajúci bod M, nadobudneme podozrenie, že $|KM| = |AB|$ a bod L je taký bod Tálesovej kružnice k nad priemerom KM so stredom E, ktorý leží na osi úsečky EB (obr. 4). Skutočne, pri



Obr. 4

opísanej voľbe bodu M a konštrukcii bodu L bude platiť $|BL| = |EL| = 2\,\mathrm{cm}$, takže aby sme sa presvedčili, že sa jedná naozaj o bod L zo zadania úlohy, stačí overiť, že aj $|AL| = |AB| = 4\,\mathrm{cm}$. Keďže (písané bez jednotiek) $|EM| = 2$, $|BM| = |AK| = 1$, a teda $|BD| = |ED| = \frac{1}{2}$ a $|AD| = \frac{7}{2}$, podľa Pytagorovej vety použitej postupne na pravouhlé trojuholníky BDL a ADL pre takto zostrojený bod L máme

$$|DL|^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}, \qquad |AL|^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2.$$

Tým je naša hypotéza overená. Obsah trojuholníka KLM už spočítame ľahko:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}|KM| \cdot |LD| = 2|DL|\,\mathrm{cm} = \sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zopakujte si Euklidove vety o odvesne a o výške pravouhlého trojuholníka a pripomeňte si ich dôkazy na základe podobnosti daného trojuholníka s dvoma menšími trojuholníkmi, ktoré vzniknú jeho rozdelením pomocou výšky na preponu.

D1. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l. [59–C–S–2]

D2. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S. [58–C–II–4]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Roman Soták, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015