

65. ročník Matematickej olympiády, 2015/2016

Úlohy krajského kola kategórie B

1. Určte všetky trojice celých kladných čísel k , l a m , pre ktoré platí

$$\frac{3l + 1}{3kl + k + 3} = \frac{lm + 1}{5lm + m + 5}.$$

2. Daná je úsečka AB , jej stred C a vnútri úsečky AB bod D . Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F . Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE .
3. Nájdite všetky prirodzené čísla n , ktoré majú práve šesť deliteľov, pričom súčet druhého najväčšieho a druhého najmenšieho z nich je 54.
4. Dané je prirodzené číslo k , $4 \leq k \leq 900$. Adam a Braňo hrajú hru: Adam napíše na tabuľu k rôznych trojčiferných čísel, Braňo si z nich vyberie štyri rôzne. Ak rozdiel medzi dvoma najmenšími aj rozdiel medzi dvoma najväčšími vybranými číslami je nanejvýš 22, vyhráva Braňo, inak vyhráva Adam. V závislosti od hodnoty k určte, kto má vyhrávajúcu stratégiu.

Krajské kolo kategórie B sa koná

v utorok 12. apríla 2016

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajčí, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Štefan Gyürki

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016