

65. ročník Matematickej olympiády, 2015/2016

Úlohy krajského kola kategórie A

1. Na tabuli sú napísané rôzne kladné celé čísla. Ich aritmetický priemer je desatinné číslo, ktorého desatinná časť je presne 0,2016. Akú najmenšiu hodnotu môže tento priemer mať?
2. Daný je štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1. Na jeho strane CD zvolíme bod E tak, aby platilo $|\angle BAE| = 60^\circ$. Ďalej zvolíme ľubovoľný vnútorný bod úsečky AE a označme ho X . Bodom X potom vedme kolmicu na priamku BX a jej priesečník s priamkou BC označme Y . Aká je najmenšia možná dĺžka úsečky BY ?
3. Kolkými spôsobmi sa dá rozdeliť množina $\{1, 2, \dots, 12\}$ na šesť disjunktných dvojprvkových podmnožín takých, že každá z nich obsahuje navzájom nesúdeliteľné čísla (teda také, ktoré nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1)?
4. Určte najmenšie reálne číslo m , pre ktoré možno nájsť reálne čísla a a b tak, aby nerovnosť

$$|x^2 + ax + b| \leq m(x^2 + 1)$$

platila pre každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Krajské kolo kategórie A sa koná

v utorok 12. januára 2016

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016