

**66. ročník Matematickej olympiády, 2016/2017**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A**

PRVÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 27. MARCA 2017

1. Na kôpke leží 100 diamantov, z ktorých 50 je pravých a 50 falošných. Pozvali sme svojrázneho znalca, ktorý jediný dokáže rozpoznať, ktoré sú ktoré. Zakaždým, keď mu ukážeme nejakú trojicu diamantov, dva vyberie a (pravdivo) povie, koľko z nich je pravých. Rozhodnite, či môžeme zaručene odhaliť všetky pravé diamanty bez ohľadu na to, ako znalec volí posudzované dvojice.

2. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel  $k, l$  také, že nerovnosť

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

platí pre dĺžky strán  $a, b, c$  ľubovoľného trojuholníka.

3. Nájdite všetky funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky reálne čísla  $x, y$  platí

$$f(y - xy) = f(x)y + (x - 1)^2 f(y).$$

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017

**66. ročník Matematickej olympiády  
2016/2017**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A**

DRUHÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 28. MARCA 2017

4. Každéj postupnosti zloženej z  $n$  núl a  $n$  jednotiek priradíme číslo, ktoré je počtom úsekov rovnakých cifier v nej. (Napríklad postupnosť 00111001 má 4 také úseky 00, 111, 00, 1.) Pre dané  $n$  sčítame všetky čísla priradené jednotlivým takým postupnostiam. Dokážte, že výsledný súčet je rovný

$$(n + 1) \binom{2n}{n}.$$

5. Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$  s priesečníkom výšok  $H$ . Os uhla  $BHC$  pretína stranu  $BC$  v bode  $D$ . Označme postupne  $E$  a  $F$  obrazy bodu  $D$  v osových súmernostiach podľa priamok  $AB$  a  $AC$ . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku  $AEF$  prechádza stredom kružnicového oblúka  $BAC$ .

6. Dané je nenulové celé číslo  $k$ . Dokážte, že rovnici

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje nepárny počet usporiadaných dvojíc celých čísel  $(x, y)$  práve vtedy, keď  $k$  je deliteľné siedmimi.

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017