

66. ročník Matematickej olympiády, 2016/2017

Úlohy celoštátneho kola kategórie A (maďarská verzia)

ELSŐ VERSENYNAP, 2017. MÁRCIUS 27.

1. Egy rakáson 100 gyémánt hever, melyből 50 valódi és 50 hamis. Meghívtunk egy sajátos szakértőt, ő az egyetlen aki meg tudja mondani melyik gyémánt milyen. Mindig, amikor megmutatunk neki három gyémántot, kiválaszt közülük kettőt és megmondja (igazmondóan), hogy ezek közül mennyi a valódi. Határozzátok meg, hogy meg tudjuk-e lelni a szakértő segítségével az összes valódi gyémántot függetlenül attól, hogy ő hogyan válogatja ki a megítélendő párosokat.
2. Keressétek meg az összes olyan valós számokból álló k, l párt, amelyek esetében bármely háromszög a, b, c oldalaira fennáll a

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

egyenlőtlenség.

3. Keressétek meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre tetszőleges x és y valós számok esetén fennáll az

$$f(y - xy) = f(x)y + (x - 1)^2 f(y)$$

egyenlőség.

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017

**66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A
(maďarská verzia)**

MÁSODIK VERSENYNAP, 2017. MÁRCIUS 28.

4. Az összes n nullából és n egyesből álló sorozathoz hozzárendeljük azt a számot, amely megadja, hogy hány egyforma számjegyből álló szakaszt tartalmaz. (Például, a 00111001 sorozat 4 ilyen szakaszt tartalmaz, ezek: 00, 111, 00, 1.) Adott n esetén összeadjuk az összes sorozathoz rendelt számot. Bizonyítsátok be, hogy az így kapott összeg

$$(n + 1) \binom{2n}{n}.$$

5. Adott az ABC hegyesszögű háromszög H magasságpontja. A BHC szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Jelölje rendre E ill. F a D pont AB ill. AC tengely szerinti tükörképét. Bizonyítsátok be, hogy az AEF háromszög köré írt köre áthalad a BAC körív középpontján.

6. Adott a nullától különböző k egész szám. Bizonyítsátok be, hogy a

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

egyenletet akkor és csak akkor elégíti ki páratlan számú, egész számokból álló (x, y) rendezett számpár, amikor k osztható 7-tel.

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017