

66. ročník Matematickej olympiády, 2016/2017

Úlohy krajského kola kategórie A

1. Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c) také, že každý zo zlomkov

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

má celočíselnú hodnotu.

2. Daná je kružnica p so stredom K prechádzajúca bodom M a polkružnica q nad priemerom KM . Ľubovoľným bodom L vnútri úsečky KM vedieme kolmicu na KM . Tá pretne polkružnicu q v bode Q a kružnicu p v bodoch P_1, P_2 tak, že $|P_1Q| > |P_2Q|$. Priamka MQ pretína kružnicu p ešte v bode $R \neq M$. Dokážte, že pre obsahy S_1 a S_2 trojuholníkov MP_1Q a P_2RQ platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$.
3. V závislosti od reálneho parametra k určte počet riešení sústavy rovníc

$$\begin{aligned}x^2 + kxy + y^2 &= z, \\y^2 + kyx + z^2 &= x, \\z^2 + kzx + x^2 &= y\end{aligned}$$

v obore reálnych čísel.

4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškou AD . Osi uhlov BAD, CAD pretínajú stranu BC postupne v bodoch E, F . Kružnica opísaná trojuholníku AEF pretína strany AB, AC postupne v bodoch G, H . Dokážte, že priamky EH, FG a AD sa pretínajú v jednom bode.

Krajské kolo kategórie A sa koná

v utorok 10. januára 2017

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Patrik Bak

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017