

66. ročník Matematickej olympiády, 2016/2017

Úlohy krajského kola kategórie A (maďarská verzia)

1. Keressétek meg az összes olyan egész számokból álló (a, b, c) számhármast, amelyekre az

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

törtek mindegyikének értéke egész szám!

2. Adott az M ponton áthaladó K középpontú p körvonal és a KM átmérő feletti q félkör. A KM szakasz egy tetszőleges L belső pontján keresztül merőlegest húzunk. Ez a q félkört a Q pontban, a p körvonalat pedig a P_1 és P_2 pontokban metszi úgy, hogy $|P_1Q| > |P_2Q|$. Az MQ egyenes a p körvonalat még az $R \neq M$ pontban is metszi. Bizonyítsátok be, hogy az MP_1Q ill. P_2RQ háromszögek S_1 ill. S_2 területeire fennáll: $1 < S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$.

3. Állapítsátok meg, hogy a k valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az

$$x^2 + kxy + y^2 = z,$$

$$y^2 + kyx + z^2 = x,$$

$$z^2 + kzx + x^2 = y$$

egyenletrendszernek a valós számok halmazán.

4. Adott az AD magasságvonalú ABC hegyesszögű háromszög. A BAD ill. CAD szögek tengelyei a BC oldalat rendre az E ill. F pontokban metszik. Az AEF háromszög körülírt köre az AB ill. AC oldalakat rendre a G ill. H pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az EH , FG és AD egyenesek egy pontban metszik egymást!

Az **A** kategória kerületi fordulójára

2017. január 10-én (kedden)

délelőtt kell sort keríteni úgy, hogy legkésőbb 10 órakor kezdődjön és a versenyzőknek a feladatok megoldására 4 óra álljon a rendelkezésükre. A versenyző mindegyik feladatért 6 pontot szerezhet. Sikeres megoldónak nyilvánul az a versenyző, aki 10 vagy több pontot szerez. A verseny folyamán tilos a számológépek és egyéb más elektronikus segédeszközök, valamint bármilyen írásos jegyzetek használata. Ezeket a feltételeket a verseny kezdete előtt kell a versenyzők tudomására hozni.

A feladatok megoldásai a verseny napján 14 órától megtekinthetők lesznek a következő weboldalakon: www.olympiady.sk és skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Peter Novotný, Patrik Bak

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017