

66. ročník Matematickej olympiády, 2016/2017

Úlohy krajského kola kategórie B

1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

2. Na kružnici k je vyznačený konečný počet jej oblúkov, pričom ich zjednotenie pokrýva celú kružnicu k a každý oblúk má dĺžku menšiu ako je obvod kružnice k . Dokážte, že existuje taká podmnožina M danej množiny oblúkov, že súčet dĺžok všetkých oblúkov z M nie je väčší ako dvojnásobok obvodu kružnice k a zároveň zjednotenie oblúkov z M pokrýva celú kružnicu k .
3. V rovine sú dané kružnice k a l , ktoré sa pretínajú v bodoch E a F . Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k , ktorý neobsahuje bod F , zvolíme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.
4. Určte všetky hodnoty reálneho parametra p tak, aby rovnica

$$2017 \cdot \left| 1 - \left| 1 - \left| 1 - x \right| \right| \right| = 2016x + p$$

mala práve tri riešenia v obore reálnych čísel.

Krajské kolo kategórie B sa koná

v utorok 11. apríla 2017

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačku ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajčí, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017