66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

---

1. *Nájdite všetky mnohočleny $P(x)=ax^2+bx+c$ s celočíselnými koeficientmi spĺňajúce*

$$1<P(1)<P(2)<P(3) \qquad \text{a súčasne} \qquad \frac{P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)}{4}=17^2.$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Rovnosť zo zadania je ekvivalentná rovnosti $P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)=4\cdot 17^2$, takže čísla $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ môžu byť iba z množiny deliteľov čísla $4\cdot 17^2$ väčších ako 1:

$$2<4<17<2\cdot 17<4\cdot 17<17^2<2\cdot 17^2<4\cdot 17^2.$$

Ak by platilo $P(1)\geqq 4$, bol by súčin $P(1)P(2)P(3)$ aspoň $4\cdot 17\cdot(2\cdot 17)=8\cdot 17^2$, čo nevyhovuje zadaniu. Preto $P(1)=2$ a tak je nutne $P(2)=17$, pretože keby bolo $P(2)=4$, musel by byť daný súčin $4\cdot 17^2$ deliteľný číslom $P(1)P(2)=8$, čo neplatí, a pre $P(2)\geqq 2\cdot 17$ by bol súčin $P(1)P(2)P(3)$ opäť príliš veľký. Pre tretiu neznámu hodnotu $P(3)$ potom vychádza $P(3)=4\cdot 17^2/(2\cdot 17)=2\cdot 17$.

Hľadané koeficienty a, b, c tak sú práve také celé čísla, ktoré vyhovujú sústave

$$\begin{aligned} P(1) &= a+b+c=2,\\ P(2) &= 4a+2b+c=17,\\ P(3) &= 9a+3b+c=34. \end{aligned}$$

Jej vyriešením dostaneme $a=1$, $b=12$, $c=-11$.

Záver. Úlohe vyhovuje jediný mnohočlen $P(x)=x^2+12x-11$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za konštatovanie faktu, že $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sú z množiny deliteľov čísla $4\cdot 17$ dajte 1 bod, za vypísanie všetkých deliteľov body neudeľujte. Za odvodenie hodnôt, ktorým sa musia rovnať čísla $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ prideľte 3 body. Za zostavenie (1 bod) a vyriešenie (1 bod) sústavy potom záverečné 2 body (tieto body dajte aj v prípade, keď hodnoty $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sú určené chybne, no sústava s nimi je zostavená a vyriešená správne).

---

2. *Štvorcovú tabuľku 6×6 zaplníme všetkými celými číslami od 1 do 36.*

a) Uveďte príklad takého zaplnenia tabuľky, že súčet každých dvoch čísel v rovnakom riadku či v rovnakom stĺpci je väčší ako 11.

b) Dokážte, že pri ľubovoľnom zaplnení tabuľky sa v niektorom riadku alebo stĺpci nájdu dve čísla, ktorých súčet neprevyšuje 12.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. a) Aby sme dosiahli požadované rozmiestnenie čísel v tabuľke, nesmú v žiadnom riadku ani stĺpci spolu zostať dve z čísel nanajvýš rovných šiestim. Preto jednu z mnohých vyhovujúcich tabuliek zostavíme, keď čísla od 1 do 6 vpíšeme zhora nadol do políčok jednej uhlopriečky a ďalej budeme postupne zdola nahor brať rady políčok rovnobežných s druhou uhlopriečkou a do voľných miest každej z nich vpisovať zhora nadol zvyšné čísla 7, 8 atď. až 36:

1	35	33	29	25	19
36	2	30	26	20	15
34	31	3	21	16	11
32	27	22	4	12	9
28	23	17	13	5	7
24	18	14	10	8	6

Najmenšie súčty dvoch čísel z jednotlivých riadkov (zhora nadol) sú

$$1+19,\ 2+15,\ 3+11,\ 4+9,\ 5+7,\ 6+8$$

a z jednotlivých stĺpcov (zľava doprava)

$$1+24,\ 2+18,\ 3+14,\ 4+10,\ 5+8,\ 6+7.$$

Rýchlejší opis príkladu vyhovujúcej tabuľky a jeho jednoduchšiu kontrolu dostaneme, keď do tabuľky vpíšeme iba čísla od 1 do 12, ako vidíme nižšie. Rozmiestnenie čísel od 13 do 36 do prázdnych políčok už zrejme môže byť ľubovoľné – dve najmenšie čísla v každom riadku aj stĺpci sú totiž práve tie od 1 do 12.

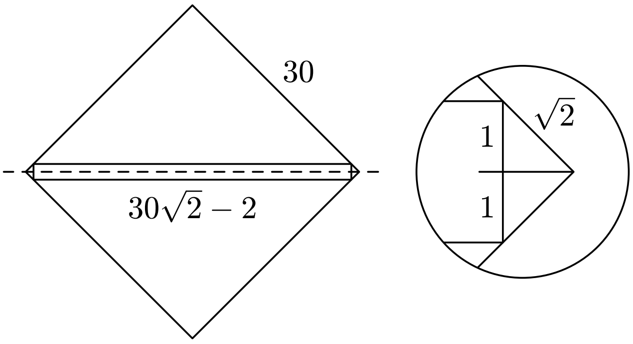
1	11				
12	2				
		3	9		
		10	4		
				5	7
				8	6

b) Ak sú dve z čísel od 1 do 6 v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci, ich súčet neprevýši dokonca ani číslo $6+5=11$. V opačnom prípade sú čísla od 1 do 6 rozmiestnené vo všetkých riadkoch a všetkých stĺpcoch, takže číslo 7 je v rovnakom riadku s číslom x a v rovnakom stĺpci s číslom y, pričom x a y sú dve *rôzne* čísla od 1 do 6. Potom menšie z čísel $7+x$ a $7+y$ neprevýši menšie z čísel $7+6$ a $7+5$, teda číslo 12. Tým je tvrdenie dokázané.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Každú z častí ohodnoťte tromi bodmi. V časti a) stačí uviesť akýkoľvek príklad, najmenšie súčty dvoch čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch nie je nutné vypisovať, tiež nie je nutné určovať konkrétne pozície niekoľkých najvyšších čísel, ak je to zdôvodnené – napríklad v úplnom príklade zo vzorového riešenia nezáleží na umiestnení čísel od 25 do 36 na príslušných dvanásť políčok. V časti b) dajte 1 bod za úvahu o rozmiestnení najmenších čísel od 1 do 6; ďalšie body nestrhávajte, keď riešiteľ ďalej uvažuje iba umiestnenie týchto šiestich čísel na jednu z uhlopriečok tabuľky.

3. *Dokážte, že obdĺžnik s rozmermi* 32×120 *sa dá zakryť siedmimi zhodnými štvorcami so stranou 30.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Štyrmi štvorcami so stranou 30 zrejme zakryjeme obdĺžnik 30×120. Zvyšnú časť 2×120 rozdelíme na tri zhodné časti, konkrétne obdĺžniky 2×40, a ukážeme, ako každý z nich (rovnako) pokryť jedným z troch zvyšných štvorcov so stranou 30. Dosiahneme to, keď štvorec položíme na obdĺžnik tak, že obe uhlopriečky štvorca budú ležať na osiach súmernosti dotyčného obdĺžnika. Stačí potom ukázať, že obdĺžnik so stranou 2 vpísaný do štvorca podľa obr. 1 má druhú stranu dlhšiu ako 40. Jej dĺžka je zrejme $30\sqrt{2}-2$ (od uhlopriečky štvorca odčítame na každej strane 1 ako veľkosť výšky



Obr. 1

pravouhlého trojuholníka so stranami 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, pozri zväčšenú časť obr. 1), takže stačí ukázať, že $30\sqrt{2}-2 \geqq 40$. To je ekvivalentné s nerovnosťou $5\sqrt{2} \geqq 7$, čiže $50 \geqq 49$, čo je splnené. Daný obdĺžnik 32×120 teda naozaj možno zakryť siedmimi štvorcami so stranou 30.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za redukciu úlohy na pokrytie obdĺžnika 2×120 tromi štvorcami so stranou 30 dajte 1 bod. Za uvažovanie vpísaných obdĺžnikov $2 \times$ niečo dajte tiež 1 bod. Za výpočet ich dlhšej strany 2 body. Úvahu, že na pokrytie obdĺžnika 2×40 či celého 2×120 postačuje platnosť nerovnosti $30\sqrt{2}-2 > 40$ či $90\sqrt{2}-6 > 120$ oceňte jedným bodom a jej dôkaz tiež jedným bodom.

4. *Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla* $a \leqq b \leqq c$ *platí*

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 3.$$

(*Šárka Gergelitsová*)

Riešenie. Nerovnosť vynásobíme kladným výrazom abc a po roznásobení ju postupne (ekvivalentne) upravíme:

$$\begin{aligned} -a(bc+ac+ab)+b(bc+ac+ab)+c(bc+ac+ab) &\geqq 3abc, \\ -abc-a^2c-a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc &\geqq 3abc, \\ (b^2c-abc)+(bc^2-abc)+(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b) &\geqq 0, \\ bc(b-a)+bc(c-a)+ac(c-a)+ab(b-a) &\geqq 0. \end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $0 < a \leqq b \leqq c$ je výsledná, a teda aj pôvodná nerovnosť splnená.

Iné riešenie. Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme, pričom využijeme známu nerovnosť $b/c + c/b \geqq 2$, ktorá je pre kladné čísla b, c ekvivalentná s nerovnosťou $(b-c)^2 \geqq 0$:

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1 + \left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geqq$$
$$\geqq 1 + \frac{b^2-a^2}{ab} + \frac{c^2-a^2}{ac} + 2 \geqq 3,$$

pretože zrejme platí aj $a^2 \leqq b^2 \leqq c^2$.

Iné riešenie. Podľa predpokladov úlohy platia nerovnosti

$$-a+b+c \geqq c \quad \text{a} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{2}{b}+\frac{1}{c}.$$

Obe nerovnosti (s kladnými stranami) medzi sebou vynásobíme a získame tak

$$(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq c\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{2c}{b} \geqq 3,$$

pretože $c/b \geqq 1$ podľa zadania.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za násobenie nerovnice výrazom, o ktorom nie je povedané, že je kladný, strhnite 1 bod. Za použitie nerovnosti $x/y + y/x \geqq 2$ bez konštatovania kladnosti x a y strhnite taktiež bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Štefan Gyürki
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017