67. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Celoštátne kolo kategórie A

18. – 21. marec 2018

Trenčianske Teplice

1. *V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatelené. Pre kladné celé číslo $k \geqq 3$ hovoríme, že spoločnosť je k-dobrá, ak možno každú k-ticu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každí dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá.* (Josef Tkadlec)

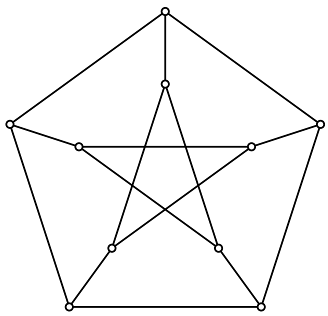
Riešenie. Uvažujme ľubovoľnú sedmicu ľudí zo skupiny, ktorá je 6-dobrá, a označme ich A až G. Stačí dokázať, že túto sedmicu možno požadovaným spôsobom rozsadiť okolo okrúhleho stola. Berme do úvahy len vzťahy medzi $A, \ldots, G$. Najskôr dokážeme, že každý z nich má (medzi nimi) aspoň troch priateľov. Bez ujmy na všeobecnosti to ukážeme pre G.

Podľa predpokladu možno okolo okrúhleho stola rozsadiť šesticu $B, \ldots, G$, takže G má určite aspoň dvoch priateľov. Bez ujmy na všeobecnosti je jedným z nich F. Podľa predpokladu možno ale okolo stola rozsadiť aj šesticu $A, \ldots, E, G$ (bez F), takže aj v nej má G aspoň dvoch priateľov, teda spolu s F má G aspoň troch priateľov.

To, že každý člen sedmice má aspoň troch priateľov, ale znamená, že aspoň jeden člen má najmenej štyroch priateľov, pretože keby každý zo siedmich členov mal práve troch priateľov, existovalo by v sedmici spolu presne $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3$ spriatelených dvojíc, čo zrejme nie je možné.

Teraz (opäť bez ujmy na všeobecnosti) predpokladajme, že člen s aspoň štyrmi priateľmi je G. Podľa predpokladu možno okolo okrúhleho stola rozsadiť šesticu $A, \ldots, F$. V takom rozsadení musia niektorí dvaja zo štyroch priateľov G sedieť vedľa seba. Člena G potom môžeme posadiť medzi nich a sme hotoví.

Poznámka. Tvrdenie, že ak je spoločnosť k-dobrá, tak je aj $(k+1)$-dobrá, platí práve pre $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 16\}$.[1] Kontrapríkladom pre $k = 9$ je napríklad takzvaný *Petersenov graf* (obr. 1).



Obr. 1

2. *Reálne čísla x, y, z sú zvolené tak, že čísla*

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

sú dĺžkami strán (nedegenerovaného) trojuholníka. Určte všetky možné hodnoty výrazu $xy + yz + zx$. (Michal Rolínek)

[1] Pozri Wikipédia: Hypohamiltonian graph.

Riešenie. Pri voľbe $x = y = z = t > 0$ sú spomenuté čísla dĺžkami strán rovnostranného trojuholníka a $xy + yz + zx = 3t^2$, takže výraz $xy + yz + zx$ môže nadobúdať všetky kladné hodnoty. Podobne pre $x = y = t > 0$ a $z = -2t$ majú tri zlomky postupne hodnoty $\frac{1}{3}t^{-2}$, $\frac{1}{3}t^{-2}$, $\frac{1}{6}t^{-2}$, čo sú kladné čísla zodpovedajúce dĺžkam strán rovnoramenného trojuholníka (platí $\frac{1}{6} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$). Pritom $xy + yz + zx = -3t^2$, takže výraz $xy + yz + zx$ môže nadobúdať aj všetky záporné hodnoty.

Ďalej dokážeme, že nulu výraz $xy + yz + zx$ nadobúdať nemôže. Predpokladajme opak. Čísla x, y, z sú nutne po dvoch rôzne: ak by platilo napríklad $x = y$, bol by menovateľ prvého zlomku rovný $|x^2 + 2yz| = |xy + (yz + xz)| = 0$, čo nie je možné.

Skúmajme zlomky bez absolútnych hodnôt. Odčítaním $xy+yz+zx = 0$ od každého menovateľa s následnou úpravou na súčin dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy} &=\\ = \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} &=\\ = \frac{(z-y)+(x-z)+(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} &= 0.\end{aligned}$$

Z toho ale vyplýva, že v pôvodnej trojici zlomkov (s absolútnymi hodnotami) bola hodnota jedného z nich súčtom hodnôt zvyšných dvoch. To je v spore s predpokladom, že tieto hodnoty sú dĺžkami strán nedegenerovaného trojuholníka (nemôžu totiž spĺňať trojuholníkovú nerovnosť!).

Odpoveď. Možnými hodnotami výrazu sú všetky reálne čísla okrem 0.

---

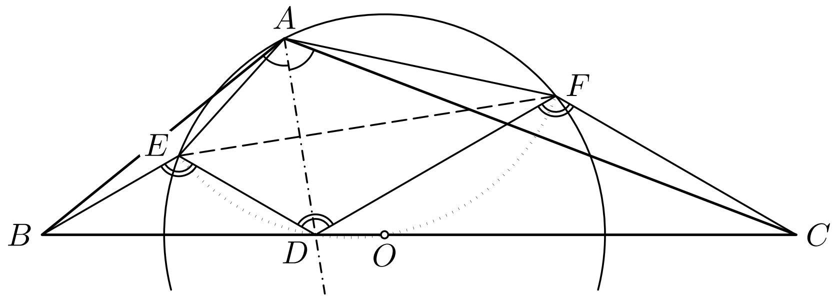
3. *Daný je trojuholník ABC. Os uhla pri vrchole A pretína stranu BC v bode D. Označme E, F stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABD, ACD. Akú veľkosť môže mať uhol BAC, ak stred kružnice opísanej trojuholníku AEF leží na priamke BC?*

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Označme α veľkosť skúmaného uhla BAC a O stred kružnice opísanej trojuholníku AEF. Keďže uhly BAD a CAD sú ostré, ležia oba body E a F v polrovine BCA, a preto pre zodpovedajúce stredové a obvodové uhly prislúchajúce tetivám BD a CD kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ACD (obr. 2) platí

$$|\measuredangle BED| = 2|\measuredangle BAD| = \alpha = 2|\measuredangle DAC| = |\measuredangle DFC|.$$

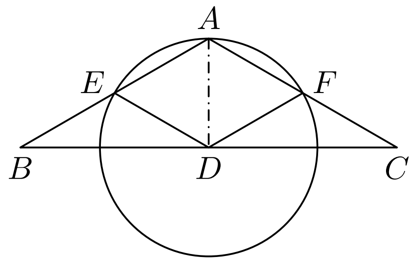
Rovnoramenné trojuholníky BED a DFC sú teda podobné (*sus*), takže $|\measuredangle EDB| = |\measuredangle FDC|$. A keďže ich základne ležia na jednej priamke, je dokonca $|\measuredangle EDF| = \alpha$. Priamka BC je preto osou vonkajšieho uhla pri vrchole D v trojuholníku EDF. Tá, ako je známe, prechádza stredom oblúka EDF kružnice opísanej trojuholníku EDF, teda bodom, ktorý leží na osi jej tetivy EF. Tým bodom je však bod O, ktorý ako stred kružnice opísanej trojuholníku AEF leží na osi strany EF (a podľa predpokladu aj na BC). Špeciálne tak platí $|\measuredangle FOE| = |\measuredangle FDE| = \alpha$.



Obr. 2

Keďže $AEDF$ je deltoid, je aj $|\measuredangle EAF| = \alpha$. Zo súmernosti je zrejmé, že priamka EF oddeľuje body A a O (ako už vieme, bod O leží na oblúku EDF, ktorý je súmerne združený s oblúkom EAF). Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle je preto veľkosť nekonvexného uhla EOF rovná dvojnásobku veľkosti konvexného uhla EAF. Tým pádom $360° - \alpha = 2|\measuredangle EAF| = 2\alpha$, z čoho okamžite vyplýva $\alpha = 120°$.

Naopak sa ľahko presvedčíme, že aspoň jeden taký trojuholník existuje (obr. 3): napríklad pre $|AB| = |AC|$ a $\alpha = 120°$ sú E, F stredmi strán AB, AC, trojuholníky DAE a DAF sú rovnostranné a stred kružnice opísanej trojuholníku AEF naozaj leží na strane BC (je totiž totožný so stredom D strany BC).



Obr. 3

Odpoveď. Jediná možná veľkosť uhla BAC je $120°$.

---

4. *Uvažujme ľubovoľnú trojicu celých čísel a, b a c, ktoré sú dĺžkami strán trojuholníka, nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1 a pre ktoré sú hodnoty všetkých troch zlomkov*

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

celočíselné. Dokážte, že súčin menovateľov týchto troch zlomkov alebo jeho dvojnásobok je druhou mocninou celého čísla. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme $z = a + b - c$, $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ kladné menovatele jednotlivých zlomkov. Potom $a = \frac{1}{2}(y + z)$, $b = \frac{1}{2}(z + x)$, $c = \frac{1}{2}(x + y)$ a

$$a^2 + b^2 - c^2 = \tfrac{1}{4}\big((y+z)^2 + (z+x)^2 - (x+y)^2\big) = \tfrac{1}{2}\big(z(z+x+y) - xy\big),$$

takže podľa predpokladu musí platiť $z \mid xy$ a podobne $y \mid xz$ a $x \mid yz$.

Teraz stačí dokázať, že pre každé nepárne prvočíslo p je exponent jeho najvyššej mocniny, ktorá ešte delí súčin xyz, párny. Ak bude aj exponent najvyššej mocniny dvojky, ktorá ešte delí súčin xyz, párny, bude xyz druhou mocninou celého čísla. V opačnom prípade bude druhou mocninou jeho dvojnásobok $2xyz$.

Pre nepárne prvočíslo p označme najvyššie mocniny, v ktorých p delí čísla x, y, z, ako p^α, p^β, p^γ. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\min\{\alpha,\beta,\gamma\}=\gamma$. Keby bolo $\gamma>0$, delilo by p každé z čísel x, y, z, a teda aj každé z čísel a, b, c, čo je v spore s ich predpokladanou nesúdeliteľnosťou. Tým pádom $\gamma=0$.

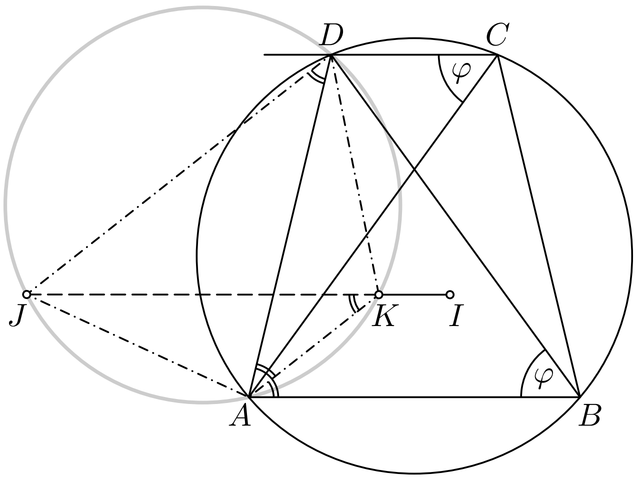
Z deliteľnosti $x \mid yz$ potom vyplýva $\alpha \leqq \beta$ a podobne z $y \mid xz$ vyplýva $\beta \leqq \alpha$, teda $\beta=\alpha$, takže v súčine xyz sa p naozaj vyskytuje v párnej mocnine $\alpha+\beta+\gamma=2\alpha$.

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

---

5. *Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Označme I stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a J stred kružnice pripísanej k strane AD trojuholníka ACD. Dokážte, že priamky IJ a AB sú rovnobežné.* (Patrik Bak)

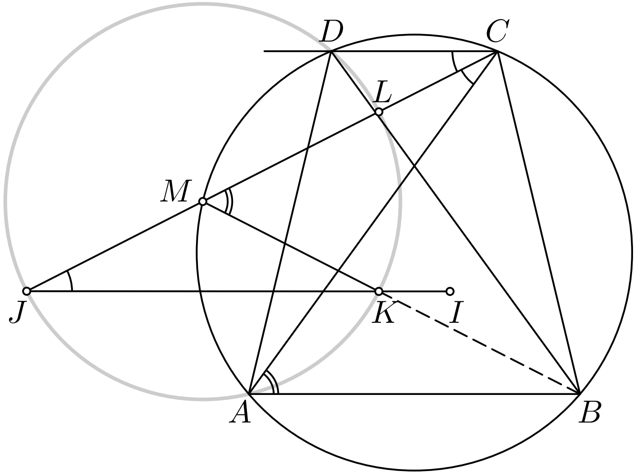
Riešenie. Označme K stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD. Keďže zrejme platí $IK \parallel AB$, stačí dokázať $JK \parallel AB$. Označme $|\angle ABD| = |\angle ACD| = \varphi$. Potom $|\angle AKD| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ a $|\angle DJA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, takže štvoruholník $AKDJ$ je tetivový (obr. 4).



Obr. 4

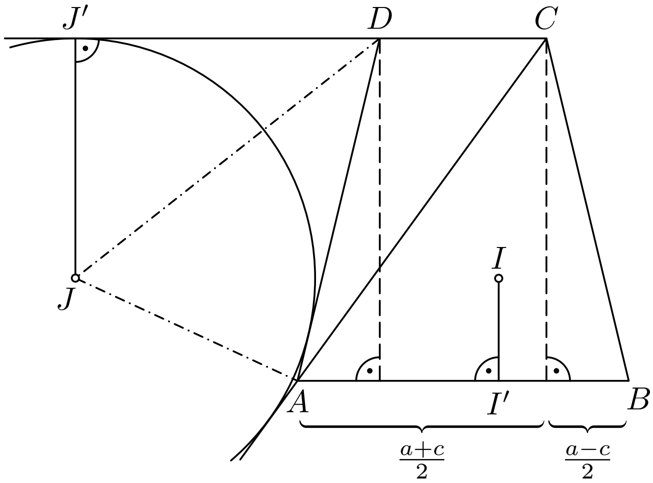
Keďže priamky AK, DJ sú osi striedavých uhlov, sú rovnobežné, čo spolu s objavenou kružnicou dáva $|\angle AKJ| = |\angle ADJ| = |\angle DAK| = |\angle KAB|$. Priamky AB a JK sú teda rovnobežné.

Poznámka. Stred M oblúka DA spoločnej kružnice opísanej trojuholníkom ACD a ABD má, ako je všeobecne známe, od vrcholov A a D rovnakú vzdialenosť ako od stredov L a K kružníc postupne týmto trojuholníkom vpísaným. Keďže oba uhly LAJ a LDJ sú navyše pravé, ležia body A, D, L a K na kružnici s priemerom LJ (obr. 5). Trojuholník JKM je teda rovnoramenný a platí $|\angle MJK| = \frac{1}{2}|\angle CMK| = \frac{1}{2}|\angle CMB| = \frac{1}{2}|\angle CAB| = \frac{1}{2}|\angle ACD| = |\angle JCD|$, čo dáva potrebnú rovnobežnosť $JK \parallel CD \parallel AB$.



Obr. 5

Iné riešenie. Označme J' pätu výšky z bodu J na priamku CD a I' pätu výšky z bodu I na priamku AB (obr. 6).



Obr. 6

Stačí dokázať $|II'|+|JJ'| = v$, pričom v je výška lichobežníka. Označme $|AB| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|CD| = c$, $|AC| = |BD| = u$. Podľa známych vzorcov potom platí

$$|JJ'| = \frac{2S_{ACD}}{|AC| + |CD| - |AD|} = \frac{c \cdot v}{u + c - b}, \quad |II'| = \frac{2S_{ABC}}{|AB| + |BC| + |AC|} = \frac{a \cdot v}{a + b + u}.$$

Po dosadení a roznásobení ostane dokázať rovnosť $u^2 = ac + b^2$, ktorú dostaneme spojením dvoch pytagorejských rovností

$$u^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + v^2, \quad b^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2$$

alebo z Ptolemaiovej vety pre (tetivový) rovnoramenný lichobežník $ABCD$.

6. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že pre ľubovoľné ofarbenie čísel 1, 2, 3, ..., n tromi farbami existujú medzi uvedenými číslami dve čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel je druhá mocnina prirodzeného čísla.*

(*Vojtech Bálint, Michal Rolínek, Josef Tkadlec*)

Riešenie. Dokážeme, že hľadané prirodzené číslo je $n = 29$. Najskôr ukážeme, že nech ofarbíme prvých 29 prirodzených čísel akokoľvek, vždy medzi nimi budú nejaké dve čísla rovnakej farby, ktoré sa budú líšiť o druhú mocninu prirodzeného čísla. A potom uvedieme príklad vhodného ofarbenia 28 čísel, ktoré ukáže, že požadovanú vlastnosť nemá žiadne $n \leqq 28$.

Pripusťme naopak, že prvých 29 prirodzených čísel možno ofarbiť tromi farbami A, B, C tak, že rozdiel žiadnych dvoch čísel tej istej farby nie je druhá mocnina, a označme $f(i)$ farbu čísla i pre $i \in \{1, 2, \ldots, 29\}$.

Keďže 9, 16 a 25 sú druhé mocniny, musia mať každé dve z čísel 1, 10, 26 rôznu farbu. To isté platí aj pre každé dve z čísel 1, 17, 26, teda čísla 10 a 17 musia mať rovnakú farbu. Rovnakú úvahu uplatníme aj pre ďalšie trojice tvaru $a, a + 9, a + 25$ a $a, a + 16, a + 25$, $a \in \{2, 3, 4\}$, teda rovnakú farbu musia mať aj čísla 11 a 18, 12 a 19, 13 a 20, čiže $f(11) = f(18)$, $f(12) = f(19)$ a $f(13) = f(20)$.

Označme A farbu čísel 10 a 17, t. j. $f(10) = f(17) = A$. Keďže čísla 10 a 11 sa líšia o $1 = 1^2$, musia mať dvojice 11, 18 inú farbu ako A, označme ich farbu ako B. Keďže $19 = 18 + 1^2 = 10 + 3^2$, musí byť $f(19)$ rôzne od $f(18) = B$ aj $f(10) = A$, takže $f(12) = f(19) = C$. Z rovností $20 = 19 + 1^2 = 11 + 3^2$ však podobne vyplýva, že $f(20) \neq f(19) = C$ a $f(20) \neq f(11) = B$, musí preto byť $f(13) = f(20) = A$. Odvodili sme $f(13) = A = f(17)$, čo je želaný spor, pretože $17 - 13 = 4 = 2^2$. Pre prvých 29 čísel teda také ofarbenie neexistuje.

Kontrapríklad pre $n = 28$ uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

	1 B	2 C	3 A	4 C
5 A	6 B	7 C	8 B	9 C
10 A	11 B	12 C	13 B	14 C
15 A	16 B	17 A	18 B	19 C
20 A	21 B	22 A	23 B	24 C
25 A	26 C	27 A	28 B	

Ľahko overíme, že každé dve čísla, ktoré sa líšia o 1, 4, 9, 16 či 25 sú ofarbené rôznou farbou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Rudolf Blaško, Ivan Cimrák, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018