

67. ročník Matematickej olympiády, 2017/2018

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

PRVÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 19. MARCA 2018

1. V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatelené. Pre kladné celé číslo $k \geq 3$ hovoríme, že spoločnosť je k -dobrá, ak možno každú k -ticu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každý dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá.
2. Reálne čísla x, y, z sú zvolené tak, že čísla

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

sú dĺžkami strán (nedegenerovaného) trojuholníka. Určte všetky možné hodnoty výrazu $xy + yz + zx$.

3. Daný je trojuholník ABC . Os uhla pri vrchole A pretína stranu BC v bode D . Označme E, F stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABD, ACD . Akú veľkosť môže mať uhol BAC , ak stred kružnice opísanej trojuholníku AEF leží na priamke BC ?

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Rudolf Blaško, Ivan Cimrák, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018

**67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018**

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

DRUHÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 20. MARCA 2018

4. Uvažujme ľubovoľnú trojicu celých čísel a , b a c , ktoré sú dĺžkami strán trojuholníka, nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1 a pre ktoré sú hodnoty všetkých troch zlomkov

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}, \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}, \quad \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c + a - b}$$

celočíselné. Dokážte, že súčin menovateľov týchto troch zlomkov alebo jeho dvojnásobok je druhou mocninou celého čísla.

5. Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB . Označme I stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a J stred kružnice pripísanej k strane AD trojuholníka ACD . Dokážte, že priamky IJ a AB sú rovnobežné.
6. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že pre ľubovoľné ofarbenie čísel $1, 2, 3, \dots, n$ tromi farbami existujú medzi uvedenými číslami dve čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel je druhá mocnina prirodzeného čísla.

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Rudolf Blaško, Ivan Cimrák, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018