

67. ročník Matematickej olympiády, 2017/2018

Úlohy celoštátneho kola kategórie A (maďarská verzia)

ELSŐ VERSENYNAP, 2018. MÁRCIUS 19.

1. Emberek egy társaságában van néhány baráti kapcsolat. Egy természetes  $k \geq 3$  szám esetén azt mondjuk, hogy egy társaság  $k$ -jó, ha a társaság tetszőlegesen kiválasztott  $k$  tagjára érvényes, hogy ezek egy kerekasztal köré ültethetők úgy, hogy mindenki baráti kapcsolatban van mindkét szomszédjával. Bizonyítsd be, hogy ha egy társaság 6-jó, akkor 7-jó is!

2. Az  $x, y, z$  valós számok úgy vannak megválasztva, hogy a

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

számok egy (nem eltorzult) háromszög oldalainak a hossza. Határozd meg az  $xy + yz + zx$  kifejezés összes lehetséges értékét!

3. Adott az  $ABC$  háromszög. Az  $A$  csúcsból induló szögfelező a  $BC$  oldalat a  $D$  pontban metszi. Jelölje  $E$ , ill.  $F$  az  $ABD$ , ill.  $ACD$  háromszög köré írt kör középpontját. Milyen nagyságú lehet a  $BAC$  szög, ha az  $AEF$  háromszög köré írt kör középpontja a  $BC$  egyenesre illeszkedik?

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Rudolf Blaško, Ivan Cimrák, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018

**67. ročník Matematickej olympiády  
2017/2018**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A  
(maďarská verzia)**

MÁSODIK VERSENYNAP, 2018. MÁRCIUS 20.

4. Tekintsük azokat az egész számokból álló  $a$ ,  $b$  és  $c$  számhármassokat, amelyek egy háromszög oldalhosszai, nincs 1-től nagyobb közös osztójuk és a

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}, \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}, \quad \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c + a - b}$$

törtek értékei egész számok. Bizonyítsd be, hogy ezen három tört nevezőinek szorzata, vagy annak kétszerese négyzetszám!

5. Adott az egyenlő szárú  $ABCD$  trapéz, melynek hosszabbik alapja  $AB$ . Jelöljük  $I$ -vel az  $ABC$  háromszög beírt körének középpontját,  $J$ -vel pedig az  $ACD$  háromszög  $AD$  oldalához hozzáírt körének középpontját. Bizonyítsd be, hogy az  $IJ$  és  $AB$  egyenesek párhuzamosak!
6. Keresd meg azt a legkisebb  $n$  természetes számot, amelyre az  $1, 2, 3, \dots, n$  számok három színnel történő tetszőleges kiszínezése esetén lesz két egyforma színű szám, amelyek különbsége négyzetszám.

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Rudolf Blaško, Ivan Cimrák, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018