68. ročník Matematickej olympiády 2018/2019

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

Prvý súťažný deň, 25. marca 2019

1. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= |y - z| + 1, \\ y^2 - zx &= |z - x| + 1, \\ z^2 - xy &= |x - y| + 1. \end{aligned}$$

2. Daný je pravouholník $ABCD$, pričom $|AB| = a \geqq b = |BC|$. Na priamke BD zostrojte body P a Q tak, aby platilo $|AP| = |PQ| = |QC|$. Uveďte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na dĺžky a, b.

3. Nech a, b, c, n sú kladné celé čísla také, že sú splnené nasledujúce podmienky:
(i) čísla a, b, c, $a + b + c$ sú po dvoch nesúdeliteľné;
(ii) číslo $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$ je n-tou mocninou celého čísla.
Dokážte, že súčin abc sa dá zapísať ako rozdiel dvoch n-tých mocnín celých čísel.

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

68. ročník Matematickej olympiády 2018/2019

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

Druhý súťažný deň, 26. marca 2019

4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Na polpriamke opačnej k polpriamke BC leží bod P taký, že $|AB| = |BP|$. Analogicky na polpriamke opačnej k polpriamke CB leží bod Q taký, že $|AC| = |CQ|$. Označme J stred kružnice pripísanej strane BC daného trojuholníka a D, E postupne jej body dotyku s priamkami AB a AC. Predpokladajme, že polpriamky opačné k polpriamkam DP a EQ sa pretínajú v bode F rôznom od J. Dokážte, že $AF \perp FJ$.

5. Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare $2^a + 3^b - 5^c$, pričom a, b, c sú nezáporné celé čísla.

6. Pre ktoré prirodzené čísla n možno do tabuľky $n \times n$ vpísať všetky celé čísla od 1 po n^2 tak, aby aritmetický priemer čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky bol celým číslom?

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019