

**68. ročník Matematickej olympiády  
2018/2019**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A  
(maďarská verzia)**

ELSŐ VERSENYNAP, 2019. MÁRCIUS 25.

1. A valós számok halmazán oldd meg az

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$

$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$

$$z^2 - xy = |x - y| + 1$$

egyenletrendszer!

2. Adott az  $ABCD$  téglalap, amelyben  $|AB| = a \geq b = |BC|$ . A  $BD$  egyenesen szerkeszd meg azokat a  $P$  és  $Q$  pontokat, amelyekre fennáll:  $|AP| = |PQ| = |QC|$ . Végezd el a megoldhatóság diszkusszióját tekintettel az  $a, b$  oldalhosszúságokra!

3. Legyenek  $a, b, c, n$  olyan pozitív egész számok, amelyekre fennállnak a következő feltételek:

(i) az  $a, b, c, a + b + c$  számok páronként relatív prímek;

(ii) az  $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$  szám egy egész szám  $n$ -edik hatványa.

Bizonyítsd be, hogy az  $abc$  szorzat felírható két egész szám  $n$ -edik hatványának különbségeként!

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019

**68. ročník Matematickej olympiády  
2018/2019**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A  
(maďarská verzia)**

MÁSODIK VERSENYNAP, 2019. MÁRCIUS 26.

4. Adott a hegyesszögű  $ABC$  háromszög. A  $BC$  félegyenessel ellentétes félegyenesen fekszik az a  $P$  pont, amelyre  $|AB| = |BP|$ . Ugyanígy, a  $CB$  félegyenessel ellentétes félegyenesen fekszik az a  $Q$  pont, amelyre  $|AC| = |CQ|$ . Jelölje  $J$  az adott háromszög  $BC$  oldalához írt körének középpontját, és  $D$  ill.  $E$  ennek érintési pontjait az  $AB$  ill.  $AC$  oldalakkal. Tegyük fel, hogy a  $DP$  és  $EQ$ -val ellentétes félegyenesek a  $J$ -től különböző  $F$  pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy  $AF \perp FJ$ !
5. Bizonyítsd be, hogy végtelenül sok olyan egész szám létezik, amelyek nem írhatók fel  $2^a + 3^b - 5^c$  alakban, ahol  $a, b, c$  nemnegatív egész számok!
6. Melyek azok az  $n$  természetes számok, amelyekre az  $n \times n$ -es táblázat kitölthető az 1-től  $n^2$ -ig terjedő egész számokkal úgy, hogy a táblázat minden sorában és minden oszlopában a számok számtani közepe egész szám legyen?

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf  
Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný  
Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki  
Redakčná úprava: Peter Novotný  
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019