

68. ročník Matematickej olympiády, 2018/2019

Úlohy krajského kola kategórie B

1. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

2. Nájdite všetky osemciferné čísla s touto vlastnosťou: keď vyškrtíme v čísle jeho prvé dve a jeho posledné dve cifry, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2 019-krát menšie ako číslo pôvodné.
3. Daná je kružnica k so stredom S a tetivou AB , ktorá nie je jej priemerom. Na polpriamke opačnej k polpriamke BA je vybraný ľubovoľný bod K rôzny od B . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKS pretína kružnicu k v takom bode C , ktorý je súmerne združený s bodom B podľa priamky SK .
4. Hovoríme, že množina kladných celých čísel je *štvorcová*, ak je neprázdna, konečná a ak súčin všetkých jej prvkov je druhou mocninou celého čísla. Dokážte, že množina $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ má práve $2^{12} - 1$ štvorcových podmnožín.

Krajské kolo kategórie B sa koná

v utorok 2. apríla 2019

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019