

## 68. ročník Matematickej olympiády, 2018/2019

### Úlohy krajského kola kategórie C

1. Každé políčko tabuľky  $68 \times 68$  máme ofarbiť jednou z troch farieb (červená, modrá, biela). Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby každá trojica susedných políčok v každom riadku a v každom stĺpci obsahovala políčka všetkých troch farieb?
2. Aký je najmenší možný súčet štyroch prirodzených čísel takých, že dvojice vytvorené z týchto čísel majú najväčšie spoločné delitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte príklad vyhovujúcej štvorice s takým súčtom a zdôvodnite, prečo neexistuje vyhovujúca štvorica s menším súčtom.
3. Na strane  $AB$  rovnobežníka  $ABCD$ , v ktorom  $|AB| = 1$ , sú zvolené body  $K$  a  $L$  tak, že  $|BK| = \frac{1}{2}$ ,  $|BL| = \frac{1}{3}$ . Na strane  $CD$  sú zvolené body  $P$  a  $Q$  tak, že  $|CP| = \frac{1}{2}$  a  $|CQ| = \frac{1}{3}$ . Priesečník priamok  $LD$  a  $KP$  označme  $X$ , priesečník priamok  $BD$  a  $LQ$  označme  $Y$ . Dokážte, že priamka  $XY$  rozpoľuje stranu  $BC$ .
4. Reálne čísla  $a, b, c$ , všetky väčšie ako  $\frac{1}{2}$ , spĺňajú podmienku  $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ . Dokážte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

Krajské kolo kategórie C sa koná

**v utorok 2. apríla 2019**

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách [www.olympiady.sk](http://www.olympiady.sk) a [skmo.sk](http://skmo.sk).

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019