68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

---

1. *Dané je prirodzené číslo n. Tom a Jerry hrajú proti sebe hru na pláne pozostávajúcom z radu 2 018 políčok. Na začiatku Jerry položí figúrku na nejaké políčko. V každom kroku potom Tom povie celé číslo z intervalu $\langle 1, n\rangle$ a Jerry posunie figúrku o vyslovený počet políčok podľa svojej voľby buď doľava, alebo doprava. Tom vyhráva, akonáhle Jerry nemá kam spraviť ťah. Nájdite najmenšie n, pre ktoré Tom vždy dokáže voliť čísla tak, aby po konečnom počte krokov vyhral.* (Josef Tkadlec)

Riešenie. Dokážeme, že hľadané najmenšie n je 1010. Predpokladajme, že $n \leqq 1009$. Potom má Jerry nasledujúcu jednoduchú stratégiu: Položí figúrku na akékoľvek políčko a potom vždy ťahá tak, aby neprehral. Taký ťah by nemohol spraviť, len ak by naľavo aj napravo od zvoleného políčka bolo nanajvýš $n-1$ políčok. To by sme potom ale mali dokopy nanajvýš len $2(n-1)+1 = 2n-1 \leqq 2017$ políčok, čo je spor.

Predpokladajme, že $n = 1010$. Očíslujme políčka zľava $1, 2, \ldots, 2018$. Ak je figúrka na políčku 1009 alebo 1010, stačí Tomovi povedať 1010 a Jerry nemôže urobiť ťah. Ak je figúrka na políčku $k < 1009$, povie Tom $1009 - k$. Vtedy Jerry nemôže spraviť ťah doprava, lebo by sa ocitol na prehrávajúcom políčku 1009. Nutne teda musí spraviť ťah doľava. Ak tento ťah nemôže spraviť, prehráva. Ak môže, priblíži sa k ľavému okraju. Lenže doľava sa nemôže posúvať donekonečna, takže ak Tom opakuje túto stratégiu, tak po konečnom počte krokov vyhrá. Analogicky, ak je figúrka na políčku $k > 1010$, povie Tom číslo $k - 1010$, čím Jerryho prinúti urobiť ťah doprava, a takto pokračuje, kým nevyhrá.

Iné riešenie. Ukážeme inú stratégiu pre Toma pre $n = 1010$. Ako sme už objasnili v predošlom riešení, ak je figúrka na políčku 1009 alebo 1010, stačí Tomovi povedať 1010. Ak je figúrka na políčku $k \leqq 504$, povie Tom $1009 - k$. Keďže $k - (1009 - k) \leqq -1$, nemôže Jerry spraviť ťah doľava, takže nutne musí spraviť ťah doprava na prehrávajúce políčko 1009. Symetricky, ak $k \geqq 1515$, povie Tom $k - 1010$ a donúti Jerryho urobiť ťah na prehrávajúce políčko 1010, keďže $k + (k - 1010) \geqq 2020$. Ďalej ak je figúrka na políčku $505 \leqq k \leqq 1008$, Tom povie 1010, a Jerry musí nutne spraviť ťah doprava, čím sa figúrka ocitne na políčku $1515 \leqq l \leqq 2018$, o ktorom už vieme, že na ňom Jerry prehrá. Napokon ak je figúrka na políčku $1011 \leqq k \leqq 1514$, bude po ťahu 1010 na políčku $1 \leqq l \leqq 504$, ktoré je pre Jerryho prehrávajúce.

Poznámka. Táto stratégia je zaujímavá tým, že dokazuje, že Tomovi na výhru stačia nanajvýš tri ťahy. Z praktického hľadiska je teda táto stratégia pre neho výhodná.

Iné riešenie. Pre $n = 1010$ ukážeme ešte jednu jednoduchú Tomovu stratégiu, pri ktorej dokonca ani nemusí poznať polohu figúrky. Stratégia je nasledujúca: Nech je figúrka na akomkoľvek políčku k, použije Tom dvojicu ťahov 1010 a 1009. Vysvetlíme, prečo je taká stratégia vyhrávajúca.

Ak $k = 1009$ alebo $k = 1010$, je už ťah 1010 víťazný. Ak $k \leqq 1008$, spôsobí dvojica ťahov 1010 a 1009, že sa figúrka nutne posunie na políčko $k+1$. Analogicky ak $k \geqq 1011$, tieto ťahy spôsobia, že sa figúrka posunie na políčko $k-1$. Uvedená dvojica ťahov teda v každom kroku figúrku približuje k políčku 1009, resp. 1010. Po konečnom počte krokov sa tak figúrka ocitne na jednom z týchto políčok, a na ňom následne prehrá.

Bodovacia schéma.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov:

- ▷ [1 bod] Správny výsledok $n = 1010$ (tento bod dajte v neúplných riešeniach iba v prípade, že je explicitne uvedené, že sa jedná o hypotézu o výsledku).
- ▷ [2 body] Jerryho stratégia pre $n \leqq 1009$ (rozobraná nižšie).
- ▷ [3 body] Tomova stratégia pre $n = 1010$ (rozobraná nižšie).

Jerryho stratégia vo všeobecnosti:

1. V prípade, že zdôvodnenie správnosti nie je dostatočné, alebo stratégia obsahuje opraviteľnú chybu, dajte nanajvýš 1 bod.
2. Tiež dajte nanajvýš 1 bod, ak je stratégia správne opísaná a zdôvodnená pre nejaké $n < 1009$, pričom sa dá jednoducho upraviť, aby fungovala pre všetky $n \leqq 1009$.
3. Za stratégiu, ktorá nefunguje pre všetky $n \leqq 1009$, a ani sa nedá jednoducho upraviť, aby fungovala, neudeľujte žiadny bod.
4. Ak riešiteľ opíše Jerryho stratégiu pre $n = 1009$, a tá funguje aj pre $n < 1009$, ale explicitne neuvedie, že funguje aj pre menšie n, tak bod strhnite práve vtedy, keď nie je evidentné, že naozaj funguje aj pre $n < 1009$.

Tomova stratégia vo všeobecnosti:

1. V prípade, že stratégia alebo dôkaz jej správnosti obsahuje malú opraviteľnú chybu, strhnite 1 bod.
2. Ak je stratégia nesprávna, tak sa pri udeľovaní čiastočných bodov riaďte podľa jednej z nasledujúcich troch schém.
3. Čiastočné body za *rôzne* Tomove stratégie sa nesčítajú.

Tomova stratégia z prvého riešenia:

- ▷ [1 bod] Stratégia pre políčka 1009 a 1010.
- ▷ [1 bod] Definovanie stratégie pre zvyšné políčka.
- ▷ [1 bod] Zdôvodnenie, že taká stratégia naozaj funguje v konečnom počte krokov.

Tomova stratégia z druhého riešenia:

- ▷ [1 bod] Stratégia pre políčka 1009 a 1010.
- ▷ [1 bod] Stratégia pre „krajné“ políčka $k \leqq 504$ a $k \geqq 1515$.
- ▷ [1 bod] Stratégia pre zvyšné $505 \leqq k \leqq 1008$ a $1011 \leqq k \leqq 1514$.

Tomova stratégia z tretieho riešenia:

- ▷ [1 bod] Explicitné definovanie stratégie.
- ▷ [1 bod] Zdôvodnenie, že figúrka sa po každej dvojici ťahov ocitne na políčku $k + 1$ alebo $k - 1$.
- ▷ [1 bod] Záver, že po konečnom počte krokov sa bude nachádzať na prehrávajúcom políčku 1009 alebo 1010.

---

2. *Nájdite všetky celé čísla m a n, pre ktoré platí* $n^{n-1} = 4m^2+2m+3$. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Z danej rovnosti vyplýva, že číslo n^{n-1} je celé. Toto číslo má zrejme rovnakú paritu ako číslo n. Číslo $4m^2 + 2m + 3$ je však vždy nepárne, takže aj n musí byť nepárne. Tým pádom je $n - 1$ párne, takže n^{n-1} je druhá mocnina nepárneho čísla (z dvoch možných základov ďalej vezmeme ten kladný).

Položme $n^{n-1} = k^2$, pričom k je kladné nepárne číslo. Dostávame tak rovnicu

$$k^2 = 4m^2 + 2m + 3. \tag{1}$$

Jej pravú stranu doplníme štandardným spôsobom na štvorec, čím dostávame

$$k^2 = \left(2m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Aby sme mali na oboch stranách celé čísla, vynásobíme získanú rovnicu číslom 4 a následne ju upravíme na súčinový tvar:

$$4k^2 = (4m + 1)^2 + 11,$$
$$(2k - 4m - 1)(2k + 4m + 1) = 11.$$

Súčin celých čísel $a = 2k - 4m - 1$ a $b = 2k + 4m + 1$ je teda rovný 11, pritom ich súčet $a + b = 4k$ je číslo kladné, takže kladné sú aj obe čísla a a b. Keďže 11 je prvočíslo, musí byť $\{a, b\} = \{1, 11\}$, a teda $4k = 12$, čiže $k = 3$. Z rovnosti $a = 5 - 4m$ potom pre $a = 1$ máme $m = 1$, zatiaľ čo pre $a = 11$ celočíselné m neexistuje. A rovnicu $n^{n-1} = k^2 = 9$ zrejme spĺňa jediné celé $n = 3$.

Jediná dvojica celých čísel (m, n) vyhovujúca zadanej rovnici je $(1, 3)$.

Poznámka. Riešenie rovnice $ab = 11$ sa samozrejme dá nájsť aj bez ďalších úvah rozobraním štyroch možností $a = \pm 1, \pm 11$. A namiesto použitia rovnosti $a = 5 - 4m$ sme mohli hodnotu $k = 3$ dosadiť do (1) a vyriešiť kvadratickú rovnicu s koreňmi $m_1 = 1$ a $m_2 = -3/2$.

Iné riešenie. Po tom, ako dokážeme, že $4m^2 + 2m + 3$ je druhá mocnina celého čísla, môžeme postupovať aj inak. Pre všetky $m \geqq 2$ totiž platí

$$(2m)^2 < 4m^2 + 2m + 3 < (2m + 1)^2$$

a naopak pre $m \leqq -2$ platí

$$(-2m - 1)^2 < 4m^2 + 2m + 3 < (-2m)^2.$$

Tým pádom ostáva preveriť iba $m \in \{-1, 0, 1\}$. Ľahko zistíme, že k riešeniu vedie iba $m = 1$, z čoho vyplýva $n = 3$.

Poznámka. Argument so „zovrením“ čísla medzi dva po sebe idúce štvorce možno použiť aj inak. Pre $m \geqq 0$ platí $(2m)^2 < 4m^2 + 2m + 3$. Keďže $4m^2 + 2m + 3$ je štvorec, tak to nutne znamená $(2m + 1)^2 \leqq 4m^2 + 2m + 3$, z čoho dostaneme $m \leqq 1$. Pre $m \leqq -1$ možno podobne využiť nerovnosť $(-2m - 1)^2 < 4m^2 + 2m + 3$.

Iné riešenie. Ukážeme ešte jeden spôsob, ako vyriešiť rovnicu (1), keď už vieme, že k je kladné nepárne číslo. Rovnicu upravíme na tvar

$$(k - 2m)(k + 2m) = 2m + 3. \tag{2}$$

Ak $m \geqq 0$, je pravá strana rovnice (2) kladná. Keďže $k + 2m$ je kladné, je aj činiteľ $k - 2m$ kladný, takže $k - 2m \geqq 1$. Vynásobením tohto odhadu číslom $k + 2m$ dostaneme $2m + 3 \geqq k + 2m$, takže $3 \geqq k$. Z dvoch možných hodnôt $k = 1$ alebo $k = 3$ dôjdeme k riešeniu iba pre $k = 3$, keď máme $(m, n) = (1, 3)$.

Ak $m < 0$, môžeme dokonca predpokladať, že $m \leqq -2$, lebo pre $m = -1$ vychádza $k^2 = 3$, čo nie je možné. Položme $m' = -m$, potom $m' \geqq 2$. Upravme (2) na

$$(k + 2m')(2m' - k) = 2m' - 3.$$

Keďže čísla $k + 2m'$, $2m' - 3$ sú kladné, je kladné aj číslo $2m' - k$, platí teda $2m' - k \geqq 1$. Vynásobením tohto odhadu číslom $k + 2m'$ dostaneme $2m' - 3 \geqq k + 2m'$, teda $-3 \geqq k$, čo odporuje predpokladu $k > 0$.

Poznámka. V prípade $m \geqq 0$ sme mohli odhad $k - 2m \geqq 1$ využiť aj inak. Je totiž ekvivalentný s nerovnosťou $k + 2m \geqq 4m + 1$, takže $2m + 3 = (k - 2m)(k + 2m) \geqq 4m + 1$, odkiaľ hneď vyplýva $m \leqq 1$.

Bodovacia schéma.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov:

▷ [1 bod] Zdôvodnenie, že číslo n musí byť nepárne.

▷ [1 bod] Zdôvodnenie, že číslo n^{n-1} musí byť druhá mocnina celého čísla.

▷ [4 body] Dokončenie riešenia (rozobrané nižšie).

Všeobecné poznámky:

1. V prípade uhádnutia výsledku $(m, n) = (1, 3)$ dajte 1 bod.
2. V prípade preskúmania konečného počtu možností dajte nanajvýš 1 bod, a síce za správny výsledok.
3. Čiastočné body z *rôznych* postupov sa nesčítajú.

Dokončenie riešenia ako v 1. riešení:

▷ [2 body] Úprava rovnice na súčinový tvar.

▷ [1 bod] Rozbor všetkých možností rozkladu $ab = 11$ ako v riešení či ako v poznámke.

▷ [1 bod] Nájdenie výsledku $(m, n) = (1, 3)$.

Neúplné riešenie: V prípade menšej chyby pri úprave na súčinový tvar strhnite 1 bod. V prípade zabudnutia nejakého rozkladu tiež strhnite 1 bod.

Dokončenie riešenia ako v 2. riešení:

▷ [1 bod] Formulácia úvahy o tom, že číslo $4m^2+2n+3$ nemôže ležať medzi dvoma po sebe idúcimi štvorcami (alebo jej ekvivalentná formulácia, pozri poznámku).

▷ [1 bod] Vylúčenie prípadu $m \geqq 2$.

▷ [1 bod] Vylúčenie prípadu $m \leqq -2$.

▷ [1 bod] Vyriešenie zvyšných prípadov a nájdenie výsledku $(m, n) = (1, 3)$.

Neúplné riešenie: V prípade chýb pri úpravách nerovností strhnite 1 až 2 body, podľa počtu a závažnosti chýb.

Dokončenie riešenia ako v 3. riešení:

▷ [1 bod] Napísanie rovnice v tvare $(k-2m)(k+2m) = 2m+3$.

▷ [1 bod] Vylúčenie prípadu $m < 0$.

▷ [1 bod] Rozobranie prípadu $m \geqq 0$ vedúceho na $k \leqq 3$ alebo $m \leqq 1$ ako v poznámke.

▷ [1 bod] Rozobranie zvyšných prípadov a nájdenie výsledku $(m, n) = (1, 3)$.

Neúplné riešenie: V prípade chýb pri úpravách nerovností strhnite 1 až 2 body, podľa počtu a závažnosti chýb.

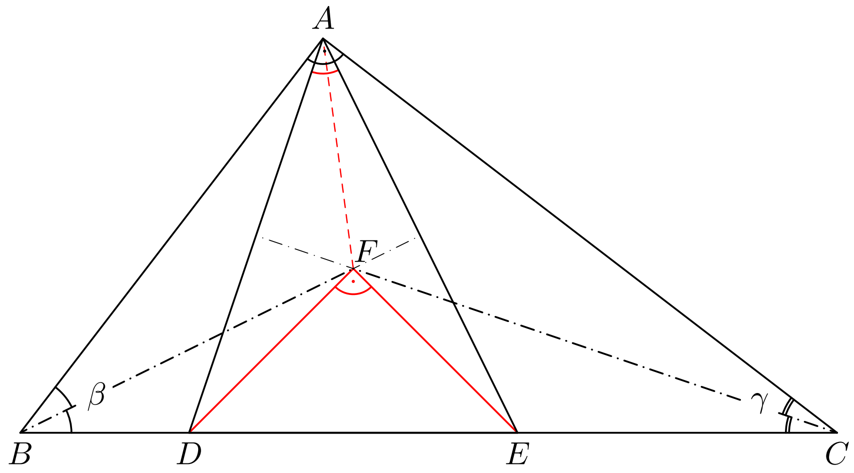
---

3. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC. Na jeho prepone BC ležia body D, E také, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nech F je taký vnútorný bod trojuholníka ABC, že DEF je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou DE. Aká je veľkosť uhla BFC?*

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Najskôr dokážeme, že F je stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE. Z $|BA| = |BE|$ vyplýva, že trojuholník BAE je rovnoramenný, takže $|\measuredangle BAE| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, a preto $|\measuredangle CAE| = \frac{1}{2}\beta$. Podobne z toho, že trojuholník CAD je rovnoramenný, dostaneme $|\measuredangle BAD| = \frac{1}{2}\gamma$. Tým pádom $|\measuredangle DAE| = 90° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 45°$ (obr. 1, body D a E ležia vnútri strany BC v uvedenom poradí, lebo $|CD| + |BE| = |CA| + |CB| > |BC|$).

Na kružnici so stredom F a polomerom $|FD| = |FE|$ ležia vďaka pravému stredovému uhlu DFE všetky tie body polroviny DEF, z ktorých úsečku DE vidno pod uhlom 45°, teda aj bod A. Bod F je preto stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE, ako sme na úvod sľúbili dokázať.



Obr. 1

Z dokázanej rovnosti $|FA| = |FE|$ vyplýva, že bod F leží na osi úsečky AE, ktorá je vďaka rovnosti $|BA| = |BE|$ zároveň aj osou uhla ABC, a podobne priamka CF je osou uhla ACB (to navyše znamená, že F je aj stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC). Tým pádom $|\measuredangle CBF| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\measuredangle BCF| = \frac{1}{2}\gamma$, takže z trojuholníka BFC dopočítame, že jeho tretí uhol je rovný $180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 135°$.

Poznámka. Po zistení, že F je stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE, sme mohli postupovať napríklad aj takto: Z vety o obvodovom a stredovom uhle vyplýva $|\measuredangle AFD| = 2|\measuredangle AEB| = 180° - \beta$. Štvoruholník $AFDB$ je teda tetivový. Podobne aj štvoruholník $AFEC$ je tetivový. Pomocou toho vypočítame

$$
\begin{aligned}
|\measuredangle BFC| &= 90° + |\measuredangle BFD| + |\measuredangle EFC| = \\
&= 90° + |\measuredangle BAD| + |\measuredangle EAC| = 90° + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = 135°.
\end{aligned}
$$

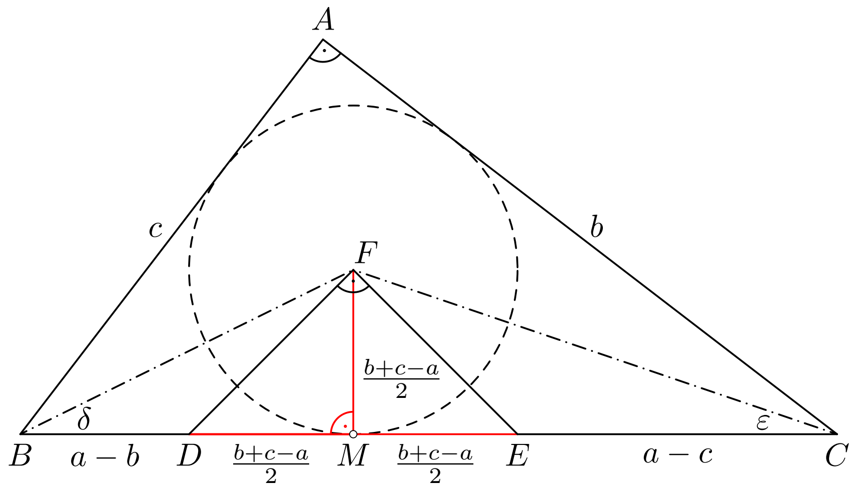
Ďalšia možnosť je vypočítať súčet veľkostí uhlov AFB a AFC, ktoré sa pomocou spomenutých tetivových štvoruholníkov prenesú na uhly ADB a AEC, ktorých veľkosti sú postupne $90° + \frac{1}{2}\gamma$ a $90° + \frac{1}{2}\beta$.

Iné riešenie. Pri zvyčajnom označení platí $|BE| = c$ a $|CD| = b$, takže ľahko vypočítame $|BD| = a - b$ a $|CE| = a - c$. Preto $|DE| = a - (a - b) - (a - c) = b + c - a$. Označme M stred úsečky DE. Keďže DEF je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, je $|MF| = |MD| = \frac{1}{2}|DE| = \frac{1}{2}(b + c - a)$. Ďalej tak máme

$$|BM| = |BD| + |DM| = (a - b) + \tfrac{1}{2}(b + c - a) = \tfrac{1}{2}(a + c - b) = s - b,$$

pričom s označuje polovicu obvodu trojuholníka ABC. Platí teda (pozri doplňajúcu úlohu D1 k 5. úlohe domáceho kola), že M je dotykový bod kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Keďže trojuholník ABC je pravouhlý, zrejme platí (pozri aj nasledujúcu doplňajúcu úlohu), že táto kružnica má polomer rovný $s - a = \frac{1}{2}(b + c - a) = |MF|$. A keďže $MF \perp BC$, dostávame, že F je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Vďaka tomu $|\measuredangle CBF| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\measuredangle BCF| = \frac{1}{2}\gamma$, z čoho už dopočítame $|\measuredangle BFC|$ ako v predošlom riešení.

Poznámka. Na rozdiel od predošlého riešenia sme vôbec nepotrebovali odhaliť, že F je stred kružnice opísanej trojuholníku ADE.



Obr. 2

Iné riešenie. Podobne ako v predošlom riešení definujeme bod M a vypočítame $|BM| = \frac{1}{2}(a+c-b)$ a $|MF| = \frac{1}{2}(b+c-a)$. Ďalej označme $|\measuredangle MBF| = \delta$ a $|\measuredangle MCF| = \varepsilon$ (obr. 2). Z pravouhlého trojuholníka MFB máme

$$\tan\delta = \frac{b+c-a}{a+c-b} \quad \text{a analogicky} \quad \tan\varepsilon = \frac{b+c-a}{a+b-c}.$$

Ďalej použijeme známy vzorec $\tan(180^\circ - x) = -\tan x$, následne súčtový vzorec pre tangens a nakoniec Pytagorovu vetu $a^2 = b^2 + c^2$ na výpočet

$$\begin{aligned}\tan|\measuredangle BFC| &= \tan(180^\circ - \delta - \varepsilon) = -\tan(\delta+\varepsilon) = -\frac{\tan\delta + \tan\varepsilon}{1 - \tan\delta\tan\varepsilon} = \\ &= -\frac{\frac{b+c-a}{a+c-b} + \frac{b+c-a}{a+b-c}}{1 - \frac{b+c-a}{a+c-b}\cdot\frac{b+c-a}{a+b-c}} = -\frac{2a(b+c-a)}{(a+c-b)(a+b-c)-(b+c-a)^2} = \\ &= -\frac{2a(b+c)-2a^2}{2a(b+c)-2(b^2+c^2)} = -\frac{2a(b+c)-2(b^2+c^2)}{2a(b+c)-2(b^2+c^2)} = -1.\end{aligned}$$

Rovnica $\tan|\measuredangle BFC| = -1$ má na intervale $(0^\circ, 180^\circ)$ jediné riešenie $|\measuredangle BFC| = 135^\circ$.

Poznámka. Aj v tomto riešení sme našli odpoveď bez toho, aby sme postrehli, že F je stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE. Nepotrebovali sme ani to, že F je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Ak by sme však túto hypotézu mali, vedeli by sme ju dokázať aj výpočtom. Stačí totiž dokázať, že $\delta = \frac{1}{2}\beta$. Pritom podľa vzorca pre tangens polovičného argumentu platí

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \sqrt{\frac{1-c/a}{1+c/a}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}.$$

Ekvivalentnými úpravami ľahko overíme, že $\tan\delta = \tan\frac{1}{2}\beta$. A keďže funkcia tangens je na intervale $(0^\circ, 90^\circ)$ prostá (je tam rastúca), je nutne $\delta = \frac{1}{2}\beta$. Analogicky $\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma$, čo už znamená, že F je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC.

Iné riešenie. Iným spôsobom ukážeme, že bod F zo zadania úlohy je zároveň stredom I kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ktorej polomer označíme ϱ. Keďže stred I leží na osiach súmerností oboch rovnoramenných trojuholníkov BAE a CAD, platí $|IE| = |IA| = |ID|$, pritom vďaka pravému uhlu BAC je zrejme $|IA| = \varrho\sqrt{2}$. Bod I ležiaci vo vzdialenosti ϱ od priamky BC tak má od dvoch jej rôznych bodov D a E tú istú vzdialenosť $\varrho\sqrt{2}$, a preto jeho kolmý priemet na BC je podľa Pytagorovej vety stredom základne DE pravouhlého rovnoramenného trojuholníka DEI. Je teda $I = F$, ako sme sľúbili dokázať.

Bodovacia schéma.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Všeobecné poznámky:

1. V prípade riešenia používajúceho analytickú geometriu dajte 6 bodov, ak je správne, a 0 bodov v prípade, keď je vadné alebo nedokončené.
2. Za hypotézu, že F je stredom kružnice vpísanej $\triangle ABC$, dajte 1 bod.
3. Za hypotézu o tetivovosti štvoruholníkov $AFDB$ a $AFEC$ však žiadny bod neudeľujte.
4. Za hypotézu o výsledku neudeľujte žiadny bod.
5. Za absenciu zmienky o poradí bodov D a E na prepone BC body nestrhávajte.
6. Čiastočné body z *rôznych* postupov sa nesčítajú.

Prvé riešenie:

▷ [2 body] Zistenie, že $|\measuredangle DAE| = 45°$, s dôkazom.
▷ [1 bod] Dôkaz, že F je stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE.
▷ [2 body] Ďalšie pozorovania umožňujúce vypočítať $|\measuredangle BFC|$, ako napríklad zdôvodnenie, že BF a CF sú osi vnútorných uhlov ABC ako v riešení, alebo dôkaz, že štvoruholníky $AFDB$ a $AFEC$ sú tetivové, ako v poznámke.
▷ [1 bod] Samotný výpočet vedúci k správnemu výsledku $|\measuredangle BFC| = 135°$.

Neúplné riešenie: Za hypotézu, že F je stredom kružnice ADE, dajte 1 bod. Tento bod možno pripočítať k všeobecne udeľovaným bodom za hypotézu, že F je stredom kružnice vpísanej $\triangle ABC$.

Riešenia používajúce bod M všeobecne (druhé a tretie riešenie):

▷ [1 bod] Definovanie bodu M.
▷ [1 bod] Vyjadrenie $|MB|$ (alebo $|MC|$) iba pomocou strán $\triangle ABC$.
▷ [1 bod] Vyjadrenie $|MF|$ iba pomocou strán $\triangle ABC$.
▷ [3 body] Dokončenie riešenia (rozobrané nižšie).

Ak riešiteľ dokazuje, že F je stredom kružnice vpísanej $\triangle ABC$:

▷ [2 body] Dôkaz, že F je stredom kružnice vpísanej $\triangle ABC$, buď pomocou odvolania sa na známe tvrdenie ako v druhom riešení, alebo výpočtom ako v poznámke k tretiemu riešeniu.
▷ [1 bod] Výpočet $|\measuredangle BFC| = 135°$.

Neúplné riešenie: Za nedokončený výpočtový dôkaz toho, že F je stredom vpísanej kružnice $\triangle ABC$, neudeľujte žiadny bod navyše (k bodom súvisiacim s definíciou bodu M).

Ak riešiteľ priamo počíta $\tan|\measuredangle BFC|$:

▷ [2 body] Samotný výpočet $\tan|\measuredangle BFC| = -1$.
▷ [1 bod] Vyriešenie rovnice $\tan|\measuredangle BFC| = -1$.

Neúplné riešenie: Za nedokončený výpočtový dôkaz $\tan|\measuredangle BFC| = -1$ neudeľujte žiadny bod navyše (k bodom súvisiacim s definíciou bodu M).

Štvrté riešenie:

▷ [1 bod] Rozhodnutie uvažovať trojuholník DEI, pričom I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Jedná sa o bod udeľovaný všeobecne za hypotézu, že $F = I$.
▷ [1 bod] Dôkaz, že I je stredom kružnice opísanej $\triangle EAD$.
▷ [1 bod] Dôkaz, že $|ID| = |IE| = \varrho\sqrt{2}$.
▷ [2 body] Zdôvodnenie, že DEI je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, odkiaľ $I = F$.
▷ [1 bod] Výpočet $|\measuredangle BFC| = 135°$.

4. *Nájdite maximálnu hodnotu výrazu $a^2+b^2+c^2$ pre reálne čísla a, b, c také, že všetky tri čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$ sú z intervalu $\langle 0,1\rangle$.* (Ján Mazák)

Riešenie. Vzhľadom na symetriu zadania môžeme predpokladať, že $a \leqq b \leqq c$. Dokážeme, že platí odhad $a^2 \leqq b^2$. Ten je totiž ekvivalentný s $(b-a)(b+a) \geqq 0$, čo platí vďaka $b \geqq a$ a $b+a \geqq 0$. Podobne platí odhad $c^2 \leqq (1-b)^2$, keďže ten je ekvivalentný s $(1-b-c)(1-b+c) \geqq 0$, pričom $1-b-c \geqq 0$ a $1-b+c > -b+c \geqq 0$. Použitím oboch odhadov máme

$$a^2+b^2+c^2 \leqq b^2+b^2+(1-b)^2. \tag{1}$$

Ďalej platí $b+b \geqq a+b \geqq 0$ a $b+b \leqq b+c \leqq 1$, takže $b \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Ostáva nájsť maximum pravej strany (1) na tomto intervale.

Pre $b=0$ platí $b^2+b^2+(1-b)^2=1$. Dokážeme, že 1 je hľadané maximum. Na to je nutné dokázať nerovnosť $b^2+b^2+(1-b)^2 \leqq 1$. Tá platí práve vtedy, keď $b(3b-2) \leqq 0$, čo je splnené pre všetky $b \in \langle 0, \frac{2}{3}\rangle$, a teda aj pre všetky $b \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Keďže pre $(a,b,c) = (0,0,1)$ platí $a^2+b^2+c^2=1$, je hľadané maximum naozaj rovné 1.

Poznámka. Výraz $b^2+b^2+(1-b)^2$ sme na intervale $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ mohli maximalizovať aj takto: Keďže sa jedná o kvadratickú funkciu v premennej b, ktorej grafom je parabola otvorená nahor, môže svoje maximum nadobúdať iba v krajných bodoch intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Stačí teda preveriť obe tieto hodnoty.

Iné riešenie. Zaveďme substitúciu $a+b=x$, $b+c=y$ a $c+a=z$. Čísla x, y, z potom ležia v intervale $\langle 0,1\rangle$ a platí $a=\frac{1}{2}(x-y+z)$, $b=\frac{1}{2}(y-z+x)$, $c=\frac{1}{2}(z-x+y)$. Hodnota $a^2+b^2+c^2$ je po úprave rovná

$$\frac{1}{4}(3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2yz-2zx). \tag{2}$$

Pozrime sa na výraz (2) ako na kvadratickú funkciu premennej x. Vieme, že $x \in \langle 0,1\rangle$. Koeficient pri x^2 je kladný, takže grafom tejto funkcie je parabola otvorená nahor. Táto funkcia preto nadobúda maximum jedine v niektorom z krajných bodov intervalu $\langle 0,1\rangle$ (je možné, že v oboch). Rovnakú úvahu však môžeme použiť aj pre premenné y a z. To znamená, že pre ľubovoľné $x,y,z \in \langle 0,1\rangle$ symetrický výraz $V = V(x,y,z)$ z (2) spĺňa nerovnosti

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &\leqq \max(V(0,y,z),V(1,y,z)) \leqq \\
&\leqq \max(V(0,0,z),V(0,1,z),V(1,0,z),V(1,1,z)) \leqq \\
&\leqq \max(V(0,0,0),V(0,0,1),V(0,1,0),V(0,1,1), \\
&\qquad V(1,0,0),V(1,0,1),V(1,1,0),V(1,1,1)) = \\
&= \max(V(0,0,0),V(0,0,1),V(0,1,1),V(1,1,1)) = \max(0,\tfrac{3}{4},1,\tfrac{3}{4}) = 1.
\end{aligned}$$

Vidíme, že výraz nadobúda maximálnu hodnotu 1 práve vtedy, keď sú práve dve z premenných x, y, z rovné 1 a tretia je rovná 0. To zodpovedá tomu, že práve dve z premenných a, b, c sú rovné 0 a tretia je rovná 1.

Iné riešenie. Po zavedení substitúcie ako v predchádzajúcom riešení teraz iným spôsobom ukážeme, že hodnota výrazu (2) je nanajvýš 1, nech sú čísla x, y, z z intervalu $\langle 0,1\rangle$ akékoľvek.

Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že platí $z=\max(x,y,z)$, a dotyčnú nerovnosť zbavenú zlomku

$$3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2yz-2zx \leqq 4$$

upravíme na tvar

$$2x(x-z)+2y(y-z)+(x-y)^2+3z^2 \leqq 4.$$

Túto nerovnosť však získame sčítaním štyroch nerovností

$$2x(x-z)\leqq 0, \quad 2y(y-z)\leqq 0, \quad (x-y)^2\leqq 1, \quad 3z^2\leqq 3,$$

ktorých platnosť je okamžitým dôsledkom nerovností

$$0\leqq x\leqq z, \quad 0\leqq y\leqq z, \quad -1\leqq x-y\leqq 1, \quad 0\leqq z\leqq 1.$$

Poznámka. Toto riešenie možno zapísať aj bez premenných x, y, z. Jednotlivé nerovnosti totiž zodpovedajú vzťahom $2(a+b)(b-c)\leqq 0$, $2(b+c)(b-a)\leqq 0$, $(a-c)^2\leqq 1$, $3(a+c)^2\leqq 3$, ktoré platia za predpokladu $b=\min(a,b,c)$ (tretí vďaka tomu, že $-1\leqq (a+b)-(b+c)\leqq 1$). Súčet ľavých strán týchto nerovností je pritom $4(a^2+b^2+c^2)$.

Bodovacia schéma.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Všeobecné poznámky:

1. Za uhádnutie maxima dajte 1 bod práve vtedy, keď je uvedená aj trojica (a,b,c), pre ktorú sa táto hodnota nadobúda.
2. Riešenia, ktoré sa opierajú o úvahy typu „ak nejakú premennú zväčšíme, tak sa výraz zväčší“, hodnoťte ako prvé riešenie po prevode týchto úvah na nerovnosti.
3. Čiastočné body z *rôznych* postupov sa nesčítajú.

1. riešenie:

- ▷ [1 bod] Dôkaz nerovnosti $a^2\leqq b^2$.
- ▷ [1 bod] Dôkaz nerovnosti $c^2\leqq (1-b)^2$.
- ▷ [1 bod] Dôkaz $b\in\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$.
- ▷ [1 bod] Odhad skúmaného výrazu $a^2+b^2+c^2$ zhora výrazom $b^2+b^2+(1-b)^2$.
- ▷ [1 bod] Dôkaz $b^2+b^2+(1-b)^2\leqq 1$ na intervale $\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$.
- ▷ [1 bod] Maximalizácia tohto výrazu a uvedenie aspoň jednej trojice (a,b,c), pre ktorú sa maximum nadobúda.

Neúplné riešenie:

1. Za samotný predpoklad $a\leqq b\leqq c$ ani za z toho vyplývajúci dôsledok $0\leqq b\leqq c$ nedávajte žiadny bod.
2. Ak riešiteľ chybne uvedie, že $a^2\leqq b^2$ vyplýva priamo z $a\leqq b$, strhnite 1 bod.
3. Ak riešiteľ chybne uvedie, že $c^2\leqq (1-b)^2$ vyplýva priamo z $c\leqq 1-b$, strhnite 1 bod.
4. Bod za odhadnutie výrazu $a^2+b^2+c^2$ zhora výrazom $b^2+b^2+(1-b)^2$ dajte ako čiastočný aj v prípade, keď nie sú potrebné nerovnosti $a^2\leqq b^2$ a $c^2\leqq (1-b)^2$ dokázané.
5. Tiež strhnite bod za algebrické chyby pri maximalizácii výrazu $b^2+b^2+(1-b)^2$.
6. Ak riešiteľ rozoberie iba prípad, keď sú čísla a, b a c všetky nezáporné (jedno z nich totiž môže byť záporné!), dajte nanajvýš 3 body.

Riešenie používajúce substitúciu $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$:

- ▷ [1 bod] Samotná Substitúcia.
- ▷ [1 bod] Prevedenie skúmaného výrazu do nových premenných x, y, z.

- ▷ [4 body] Dokončenie riešenia (rozobrané nižšie).

  Neúplné riešenie:

1. Za chybu pri prevode do premenných x, y, z strhnite 1 bod.
2. Za ďalšie chyby pri algebrických úpravách strhnite 1 až 2 dva body, podľa počtu a závažnosti chýb.

   Dokončenie riešenia so substitúciou v štýle druhého riešenia:

- ▷ [1 bod] Zdôvodnenie, že maximum kvadratickej funkcie definované na $\langle 0, 1\rangle$ s kladným koeficientom pri kvadratickom člene sa nadobúda iba v krajnom bode tohto intervalu.
- ▷ [2 body] Použitie tohto tvrdenia pre každú z premenných x, y, z a preskúmanie možných kombinácií.
- ▷ [1 bod] Nájdenie maximálnej hodnoty spolu s trojicou (a, b, c), pre ktorú sa nadobúda.

  Dokončenie riešenia so substitúciou v štýle tretieho riešenia:

- ▷ [3 body] Uhádnutie maximálnej hodnoty a dôkaz potrebnej nerovnosti.
- ▷ [1 bod] Uvedenie aspoň jednej trojice (a, b, c), pre ktorú sa maximálna hodnota nadobúda.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019