

**69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020**

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

PRVÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 29. JÚNA 2020

1. Na tabuli sú napísané dve kladné celé čísla m a n . V každom kroku jedno z dvoch čísel na tabuli nahradíme buď ich súčtom, alebo súčinom, alebo podielom (ak je celočíselný). V závislosti od čísel m a n určte všetky dvojice, ktoré sa môžu na tabuli po niekoľkých krokoch objaviť.
2. Daný je trojuholník ABC . Vnútri jeho strán AB a AC sú postupne zvolené body X a Y . Označme Z priesečník úsečiek BY a CX . Dokážte nerovnosť

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

pričom $[DEF]$ označuje obsah trojuholníka DEF .

3. Uvažujme sústavu rovníc

$$x^2 - 3y + p = z,$$

$$y^2 - 3z + p = x,$$

$$z^2 - 3x + p = y$$

s reálnym parametrom p .

- a) Pre $p \geq 4$ vyriešte uvažovanú sústavu v obore reálnych čísel.
- b) Dokážte, že pre $p \in \langle 1, 4 \rangle$ každé reálne riešenie sústavy spĺňa $x = y = z$.

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020