

**69. ročník Matematickej olympiády
2019/2020**

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

DRUHÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 30. JÚNA 2020

4. Kladné celé čísla a, b spĺňajú rovnosť $b^2 = a^2 + ab + b$. Dokážte, že b je druhou mocninou kladného celého čísla.
5. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC , vnútri ktorej je zvolený bod D . Nech E, F sú postupne také body na stranách AB, AC , že platí $|\angle BED| = |\angle DFC| > 90^\circ$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABF a AEC sa pretínajú na priamke AD v bode rôznom od bodu A .
6. Pre každé kladné celé číslo k označme $P(k)$ počet všetkých kladných celých $4k$ -ciferných čísel, ktoré možno zostaviť z cifier 2, 0 a ktoré sú deliteľné číslom 2 020. Dokážte nerovnosť

$$P(k) \geq \binom{2k-1}{k}^2$$

a určte všetky k , pre ktoré nastane rovnosť.

(*Poznámka.* Zápis kladného celého čísla nemôže začínať cifrou 0.)

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020