1. *Ondro, Maťo a Kubo sa vracajú zo zbierania orechov, dokopy ich majú 120. Maťo sa sťažuje, že Ondro má ako vždy najviac. Otec prikáže Ondrovi, aby prisypal zo svojho Maťovi tak, aby mu počet orechov zdvojnásobil. Teraz sa sťažuje Kubo, že najviac má Maťo. Na otcov príkaz prisype Maťo Kubovi tak, že mu počet orechov zdvojnásobí. Na to sa hnevá Ondro, že najmenej zo všetkých má teraz on. Kubo teda prisype Ondrovi tak, že mu počet orechov zdvojnásobí. Teraz majú všetci rovnako a konečne je kľud. Koľko orechov mal pôvodne každý z chlapcov?* (Marta Volfová)

Nápad. Aké bolo rozdelenie orechov pred tým, ako mali všetci rovnako?

Riešenie. Nakoniec mali všetci rovnako, t. j. po 40 orechoch (120 : 3). Predtým prisypával Kubo Ondrovi, a to tak, že mu počet orechov zdvojnásobil. Pred touto výmenou mal Ondro polovicu konečného stavu, takže sa presúvalo 20 orechov: Ondro mal 20 a Kubo 60 orechov (Maťo bezo zmeny).

Podobnými úvahami postupne odzadu určíme všetky výmeny orechov, a tak zistíme pôvodné počty orechov:

	Ondro	Maťo	Kubo
pôvodne	55	35	30
Ondro Maťovi	20	70	30
Maťo Kubovi	20	40	60
Kubo Ondrovi	40	40	40

Pôvodne mal Ondro 55, Maťo 35 a Kubo 30 orechov.

Iné riešenie. Ak pôvodné počty orechov označíme x, y a z, tak priebeh celej transakcie vyzeral takto:

	Ondro	Maťo	Kubo
pôvodne	x	y	z
Ondro Maťovi	$x-y$	$2y$	z
Maťo Kubovi	$x-y$	$2y-z$	$2z$
Kubo Ondrovi	$2(x-y)$	$2y-z$	$2z-(x-y)$

Podľa zadania platia nasledujúce rovnosti:

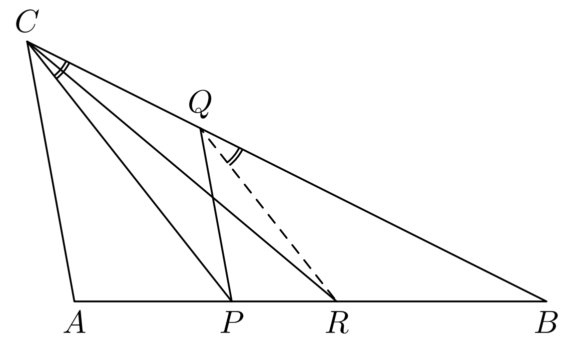
$$2(x-y) = 2y-z = 2z-(x-y) = 40.$$

Rovnosť $2(x-y) = 40$ je ekvivalentná $x-y = 20$.
Dosadením do rovnosti $2z-(x-y) = 40$ dostávame $2z = 60$, teda $z = 30$.
Dosadením do rovnosti $2y-z = 40$ dostávame $2y = 70$, teda $y = 35$.
Nakoniec z rovnosti $x-y = 20$ dostávame $x = 55$.
Pôvodne mal Ondro 55, Maťo 35 a Kubo 30 orechov.

2. *V trojuholníku ABC leží bod P v tretine úsečky AB bližšie bodu A, bod R je v tretine úsečky PB bližšie bodu P a bod Q leží na úsečke BC tak, že uhly PCB a RQB sú zhodné. Určte pomer obsahov trojuholníkov ABC a PQC.* (Lucie Růžičková)

Nápad. V opísanej spleti bodov možno nájsť viac trojuholníkov, ktorých obsahy možno porovnávať.

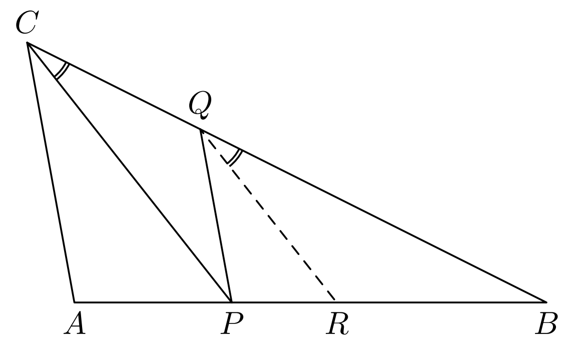
Riešenie. Body C, Q a B ležia na jednej priamke a uhly PCB a RQB sú zhodné. Teda priamky PC a RQ sú rovnobežné, trojuholníky PCQ a PCR majú rovnakú výšku na stranu PC, a tak aj rovnaký obsah. Pomer obsahov trojuholníkov ABC a PCQ je preto rovnaký ako pomer obsahov trojuholníkov ABC a PCR.



Trojuholníky ABC a PRC majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu C, teda pomer ich obsahov je rovnaký ako pomer dĺžok strán AB a PR. Pomer dĺžok úsečiek AB a PB je $3 : 2$, pomer dĺžok úsečiek PB a PR je $3 : 1$, teda pomer dĺžok úsečiek AB a PR je $(3 : 2) \cdot (3 : 1) = 9 : 2$.

Pomer obsahov trojuholníkov ABC a PQC je $9 : 2$.

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení si všimnime, že priamky PC a RQ sú rovnobežné. Z toho vyplýva, že bod Q na úsečke CB je v rovnakom pomere ako bod R na úsečke PB, t. j. v jednej tretine bližšie bodu C. V rovnakom pomere sú preto aj obsahy trojuholníkov PQC a PQB, lebo majú rovnakú výšku z vrcholu P.



Bod Q na úsečke CB je však tiež v rovnakom pomere ako bod P na úsečke AB, teda trojuholníky PQB a ACB sú podobné a koeficient podobnosti je $2 : 3$. Ich obsahy sú teda v pomere $4 : 9$.

Dokopy, pomer obsahov trojuholníkov ABC a PQB je $9 : 4$, pomer obsahov trojuholníkov PQB a PQC je $2 : 1$, teda pomer obsahov trojuholníkov ABC a PQC je $(9 : 4) \cdot (2 : 1) = 9 : 2$.

3. *Pre ktoré celé čísla x je podiel $\dfrac{x+11}{x+7}$ celým číslom? Nájdite všetky riešenia.*

(*Libuše Hozová*)

Nápad. Viete zadaný výraz nejako upraviť?

Riešenie. Zadaný výraz možno upraviť nasledovne („celá časť plus zvyšok“):

$$\frac{x+11}{x+7}=\frac{(x+7)+4}{x+7}=\frac{x+7}{x+7}+\frac{4}{x+7}=1+\frac{4}{x+7}.$$

Teda $\frac{x+11}{x+7}$ je celé číslo práve vtedy, keď $\frac{4}{x+7}$ je celé číslo, t. j. práve keď $x+7$ je deliteľom čísla 4. Číslo 4 má šesť deliteľov: -4, -2, -1, 1, 2 a 4. Zodpovedajúce hodnoty x sú o 7 menšie. Číslo $\frac{x+11}{x+7}$ je celé pre x rovné -11, -9, -8, -6, -5 alebo -3.

Iné riešenie. Aby menovateľ nebol nulový, x nemôže byť -7. Dosadzovaním celých čísel v blízkosti tejto hodnoty dostávame:

x	-6	-8	-5	-9	-4	-10	-3	-11	...
$\frac{x+11}{x+7}$	5	-3	3	-1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	0	...

So zväčšujúcou sa vzdialenosťou x od -7 dostávame v druhom riadku necelé čísla medzi 2 a 0, ktoré sa blížia k 1, ale nikdy ju nedosiahnu: keby $\frac{x+11}{x+7}=1$, tak by $x+11=$ $=x+7$, čo nie je možné. Všetky vyhovujúce možnosti sú teda obsiahnuté v uvedenej tabuľke. Číslo $\frac{x+11}{x+7}$ je celé pre x rovné -11, -9, -8, -6, -5 alebo -3.

Poznámka. Predchádzajúcu argumentáciu považujte za vyhovujúcu, i keď nie je dokonalá: ukázať správne, že pre $x>-3$ alebo $x<-11$ sú hodnoty $\frac{x+11}{x+7}$ medzi 2 a 0, asi prekračuje možnosti riešiteľov v tejto kategórii.

Táto diskusia súvisí s monotónnym správaním funkcie $x\mapsto\frac{x+11}{x+7}$. Zdanlivý zmätok v hodnotách funkcie v okolí $x=-7$ súvisí s tým, že v tomto bode nie je funkcia definovaná a jej hodnoty nie sú nijako obmedzené. Zvedaví riešitelia sa môžu zamyslieť nad správaním tejto funkcie, načrtnúť jej graf a porovnať s predchádzajúcimi závermi.

4. *Matúš dopadol padákom na ostrov obývaný dvoma druhmi domorodcov: Poctivcami, ktorí vždy hovoria pravdu, a Klamármi, ktorí vždy klamú. Pred dopadom zahliadol v diaľke prístav, ku ktorému sa hodlal dostať. Na prvom rázcestí stretol Matúš jedného domorodca a obďaleč videl druhého. Požiadal prvého, aby sa spýtal toho druhého, či je Klamár, alebo Poctivec. Prvý domorodec Matúšovi vyhovel, išiel sa spýtať a keď sa vrátil, oznámil Matúšovi, že druhý domorodec tvrdí, že je Klamár. Potom sa Matúš prvého domorodca spýtal, ktorá cesta vedie k prístavu. Ten mu jednu cestu ukázal a ďalej si Matúša nevšímal. Má, alebo nemá Matúš domorodcovi veriť? Vedie, alebo nevedie táto cesta k prístavu?*

(*Marta Volfová*)

Nápad. Začnite pri druhom domorodcovi.

Riešenie. Či Poctivec, alebo Klamár, nikto o sebe nemôže povedať, že je Klamár (Poctivec by klamal a Klamár by hovoril pravdu).

Keď prvý domorodec oznamoval Matúšovi, že druhý domorodec je Klamár, určite nehovoril pravdu. Je to teda Klamár, Matúš by mu veriť nemal a uvedená cesta do prístavu nevedie.

Poznámka. Pre prehľadnosť uvádzame možné výroky domorodcov v jednotlivých prípadoch:

prvý	druhý	druhý o sebe	prvý o druhom
Poctivec	Poctivec	„Poctivec“	„Poctivec“
Poctivec	Klamár	„Poctivec“	„Poctivec“
Klamár	Poctivec	„Poctivec“	„Klamár“
Klamár	Klamár	„Poctivec“	„Klamár“

---

5. *Majka skúmala viacciferné čísla, v ktorých sa po jednej striedajú nepárne a párne cifry. Tie, ktoré začínajú nepárnou cifrou, nazvala komické a tie, ktoré začínajú párnou cifrou, nazvala veselé. (Napr. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.) Majka vytvorila jedno trojciferné komické a jedno trojciferné veselé číslo, pričom šesť použitých cifier bolo navzájom rôznych a nebola medzi nimi 0. Súčet týchto dvoch čísel bol 1617. Súčin týchto dvoch čísel končil dvojčíslím 40. Určte Majkine čísla a dopočítajte ich súčin.* (*Monika Dillingerová*)

Nápad. Koľkociferné môžu byť súčiny trojciferných čísel a ako by ste ich ručne počítali?

Riešenie. Súčin dvoch trojciferných čísel je aspoň päťciferný a nanajvýš šesťciferný. Pre ďalšie uvažovanie si Majkine čísla označíme a naznačíme výpočet súčinu:

$$\begin{array}{r} a\,B\,c \\ +\,D\,e\,F \\ \hline 1\,6\,1\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\,B\,c \\ \cdot\,D\,e\,F \\ \hline *\,*\,*\,0 \\ *\,*\,*\,*\;\; \\ *\,*\,*\,*\;\;\;\; \\ \hline *\,*\,*\,*\,4\,0 \end{array}$$

Rôzne písmená predstavujú rôzne cifry, veľké zodpovedajú párnym a malé nepárnym.

Aby súčin končil 0, musí byť $c = 5$ (medzi použitými ciframi nie je 0). Aby súčet končil 7, musí byť $F = 2$.

Aby v súčte na mieste desiatok bola 1, musí byť $B + e = 11$. Párne B rôzne od 2 (a od 0) a nepárne e rôzne od 5, ktoré spĺňajú túto podmienku, sú buď $B = 4$, $e = 7$, alebo $B = 8$, $e = 3$. Rozoberieme obe možnosti:

- Predpokladajme, že $B = 4$ a $e = 7$.

$$\begin{array}{r} a\,4\,5 \\ +\,D\,7\,2 \\ \hline 1\,6\,1\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\,4\,5 \\ \cdot\,D\,7\,2 \\ \hline *\,*\,9\,0 \\ *\,*\,1\,5\;\; \\ *\,*\,*\,*\;\;\;\; \\ \hline *\,*\,*\,*\,4\,0 \end{array}$$

V súčine vychádza posledné dvojčíslie 40 v súlade so zadaním. Aby súčet začínal dvojčíslím 16, musí byť $a + D = 15$ (z predchádzajúceho prechod cez desiatku). Nepárne a rôzne od 5 a 7 a párne D rôzne od 2 a 4 (a 0), ktoré spĺňajú túto podmienku, sú jedine $a = 9$ a $D = 6$. V takom prípade súčin vychádza 635040.

- Predpokladajme, že $B = 8$ a $e = 3$.

$$\begin{array}{r} a\,8\,5 \\ +\,D\,3\,2 \\ \hline 1\,6\,1\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\,8\,5 \\ \cdot\,D\,3\,2 \\ \hline *\,*\,7\,0 \\ *\,*\,5\,5 \\ *\,*\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,*\,4\,0 \end{array}$$

V tomto prípade by v súčine vychádzalo posledné dvojčíslie 20 a nie 40. Táto možnosť teda vedie ku sporu s požiadavkami zo zadania.

Celkom vychádza jediná možnosť: Majkine čísla sú 945 a 672, ich súčin je 635040.

Poznámka. Ak by sme po úvodnom odvodení $c = 5$ a $F = 2$ pracovali so súčinom zapísaným opačne, tak si nemožno nevšimnúť, že bez ohľadu na hodnotu e vychádza:

$$\begin{array}{r} D\,e\,2 \\ \cdot\,a\,B\,5 \\ \hline *\,*\,6\,0 \\ *\,*\,*\,x \\ *\,*\,*\,* \\ \hline *\,*\,*\,*\,4\,0 \end{array}$$

(Cifra 6 v prvom riadku v medzivýsledku vyplýva z nepárnosti e a prechodu cez desiatku.) Aby posledné dvojčíslie súčinu vychádzalo 40, musí byť $x = 8$, a teda $B = 4$. Táto úvaha redukuje predchádzajúce skúšanie.

---

6. *Kristína zvolila isté nepárne prirodzené číslo deliteľné tromi. Jakub s Dávidom potom skúmali trojuholníky, ktoré majú obvod v milimetroch rovný Kristínou zvolenému číslu a ktorých strany majú dĺžky v milimetroch vyjadrené navzájom rôznymi celými číslami. Jakub našiel taký trojuholník, v ktorom najdlhšia zo strán má najväčšiu možnú dĺžku, a túto hodnotu zapísal na tabuľu. Dávid našiel taký trojuholník, v ktorom najkratšia zo strán má najväčšiu možnú dĺžku, a túto hodnotu tiež zapísal na tabuľu. Kristína obe dĺžky na tabuli správne sčítala a vyšlo jej 1 681 mm. Určte, ktoré číslo Kristína zvolila.*

(*Lucie Růžičková*)

Nápad. Viete vzhľadom na opísanú vlastnosť Kristíninho čísla vyjadriť Jakubovo a Dávidovo číslo?

Riešenie. Kristínino číslo, ktoré označíme k, je nepárne a deliteľné tromi. To znamená, že k je nepárnym násobkom troch, teda

$$k = 3(2n + 1) = 6n + 3$$

pre nejaké prirodzené číslo n. Veľkosti strán (v mm) Jakubovho a Dávidovho trojuholníka zodpovedajú trojiciam prirodzených čísel, ktoré v súčte dávajú k a pre ktoré platia trojuholníkové nerovnosti (súčet každých dvoch čísel je väčší ako tretie).

Najväčšia možná dĺžka najdlhšej strany v trojuholníku s obvodom k zodpovedá najväčšiemu prirodzenému číslu, ktoré je menšie ako polovica k (kvôli trojuholníkovej nerovnosti). Jakubovo číslo teda bolo $3n+1$. Zvyšné dve strany mohli zodpovedať napr. $3n$ a 2, ale to nás pre doriešenie úlohy nezaujíma.

Najväčšia možná dĺžka najkratšej strany v trojuholníku s obvodom k zodpovedá najväčšiemu prirodzenému číslu, ktoré je menšie ako tretina k (príslušný trojuholník má byť čo najviac rovnostranný, avšak strany majú byť navzájom rôzne). Dávidovo číslo teda bolo $2n$; zvyšné dve strany zodpovedali $2n + 1$ a $2n + 2$.

Súčet Jakubovho a Dávidovho čísla je $5n + 1$, čo má podľa zadania zodpovedať 1681. Z toho $5n = 1680$, a teda $n = 336$. Kristínino číslo bolo

$$k = 6 \cdot 336 + 3 = 2019.$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019