

69. ročník Matematickej olympiády, 2019/2020
Úlohy krajského kola kategórie A

1. Nájdiť všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1, \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

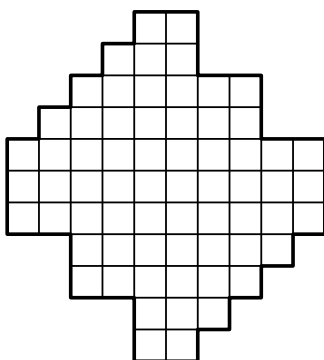
2. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme O stred kružnice opísanej. Obraz bodu O v osovej súmernosti podľa priamky AC označme P . Dokážte, že stredy úsečiek AO a BP ležia na tej istej kolmici na priamku BC .

3. Pre ľubovoľnú štvorprvkovú podmnožinu P množiny $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ označme

$$Q = \{3x : x \in P\} \quad \text{a} \quad R = \{4x : x \in P\}.$$

Určte počet takých množín P , pre ktoré čísla z P , Q , R dávajú po delení číslom 13 všetky možné nenulové zvyšky.

4. Určte, koľkými spôsobmi možno útvar



vydláždiť dominovými kockami.

Krajské kolo kategórie A sa koná

v utorok 14. januára 2020

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Tomáš Bárta, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019