

# SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

## MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

70. ročník, školský rok 2020/2021

Domáce kolo

Kategórie **A, B, C** – zadania úloh



Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 70. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.

Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.

Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.

Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **1. decembra 2020** (kategória **A**) a do **18. januára 2021** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobré*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak *X* a práve traja žiaci (vrátane *X*) dosiahnu rovnako veľa bodov ako *X*, tak žiakovi *X* patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určíme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštatnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústreďení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2021 v Rusku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2021 v Rakúsku) a na Stredo európsku matematickú olympiádu (bude na konci augusta 2021 na Slovensku alebo v Chorvátsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2021 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších rie-

šiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 70. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	08. 12. 2020	12. 01. 2021	21. – 24. marca 2021
Kategórie B, C	26. 01. 2021	30. 03. 2021	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

**Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:**

Emil Kruh  
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okružle nám. 5, 940 01 Nové Zámky  
Kraj Nitra  
2020/2021  
C – I – 3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezместí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očísľujte. **Riešenie píšete ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.  
predseda Slovenskej komisie MO

*Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:*

<http://www.olympiady.sk>    <http://skmo.sk>    <http://www.imo-official.org>



Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom.

K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *iKS*, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *iKS* nájdete na <http://kms.sk> a <http://iksco.org>.



# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

## 70. ročník Školský rok 2020 / 2021 Domáce kolo

\*\*\*\*\*

### KATEGÓRIA A

#### A – I – 1

Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je

a) päť;

b) sedem.

(Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)

#### A – I – 2

V ostrouhlom trojuholníku  $ABC$  ležia na strane  $BC$  body  $D$  a  $E$  tak, že  $D$  je medzi  $B$  a  $E$ ,  $|AD| = |CD|$  a  $|AE| = |BE|$ . Bod  $F$  je taký bod, že  $FD \parallel AB$  a  $FE \parallel AC$ . Dokážte, že  $|FB| = |FC|$ .

(Patrik Bak)

#### A – I – 3

Ak sú  $a, b, c$  navzájom rôzne kladné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami  $a + b, b + c, c + a, ab, bc, ca, abc$ ?

(Patrik Bak)

#### A – I – 4

Najväčšieho deliteľa  $d$  prirodzeného čísla  $n > 1$  s vlastnosťou  $d < n$  nazveme jeho *superdeliteľom*.

a) Dokážte, že každé prirodzené číslo  $d > 1$  je superdeliteľom iba konečného počtu čísel.

b) Označme  $s(d)$  súčet všetkých čísel, ktorých superdeliteľom je dané číslo  $d > 1$ . Rozhodnite, či existuje nepárne číslo  $d > 1$  také, že  $s(d)$  je násobkom čísla 2020.

(Michal Rolínek)

#### A – I – 5

V trojuholníku  $ABC$  označme  $S_a, S_b, S_c$  postupne stredy jeho strán  $BC, CA, AB$ . Dokážte, že pre ľubovoľný bod  $X$  rôznych od bodov  $S_a, S_b, S_c$  platí

$$\min \left\{ \frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|} \right\} \leq 2.$$

(Patrik Bak)

#### A – I – 6

Majme 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek vieme pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne zasvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?

(Martin Melicher)

\*\*\*\*\*

### KATEGÓRIA B

**B – I – 1**

Z cifier 0 až 9 vytvoríme dvojciferné čísla  $AB, CD, EF, GH, IJ$ , pričom každú cifru použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať súčet  $AB + CD + EF + GH + IJ$  a ktoré hodnoty to sú. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojciferné čísla.) (Jaroslav Zhouf)

**B – I – 2**

Aká je najväčšia možná hodnota výrazu  $xy - x^3y - xy^3$ , ak sú  $x, y$  kladné reálne čísla? Pre ktoré  $x, y$  sa táto hodnota dosahuje? (Mária Dományová, Patrik Bak)

**B – I – 3**

V ostrouhlom trojuholníku  $ABC$  sú  $AA'$  a  $BB'$  jeho výšky. Kolmý priemet bodu  $A'$  na výšku  $BB'$  označme  $D$ . Predpokladajme, že kružnica prechádzajúca bodmi  $B, C, D$  pretína stranu  $AC$  v jej vnútornom bode  $E$ . Dokážte, že  $|DE| = |AA'|$ . (Patrik Bak)

**B – I – 4**

Zistite, pre ktoré hodnoty reálneho parametra  $k$  má sústava rovníc

$$\begin{aligned} |x + 6| + 2|y| &= 24, \\ |x + y| + |x - y| &= 2k \end{aligned}$$

nepárny počet riešení v obore reálnych čísel.

(Pavel Calábek)

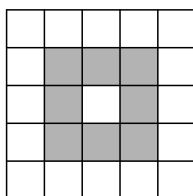
**B – I – 5**

Daný je pravidelný sedemuholník  $ABCDEFG$ . Kolmica vedená bodom  $D$  na priamku  $DE$  pretína priamky  $CG$  a  $AB$  postupne v bodoch  $P$  a  $Q$ . Dokážte, že  $|AQ| + |EF| = |GP|$ .

(Marián Poturnay)

**B – I – 6**

Na pláne s rozmermi  $12 \times 12$  štvorčekov sa nachádza loď tvorená ôsmimi políčkami pozdĺž obvodu štvorca  $3 \times 3$  (na obrázku je vyznačená sivou farbou). Na koľko najmenej políčok treba vystreliť, aby sme s istotou zasiahli loď aspoň raz? (Jozef Rajník)





**MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA**  
**70. ročník Školský rok 2020 / 2021 Domáce kolo**

\*\*\*\*\*

**KATEGÓRIA C**

**C – I – 1**

Určte všetky dvojice  $(m, n)$  prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

pričom  $s(a)$  označuje ciferný súčet prirodzeného čísla  $a$ .

(Jaroslav Švrček)

**C – I – 2**

Určte, pre ktoré prirodzené čísla  $n$  možno tabuľku  $n \times n$  vyplniť číslami 2 a  $-1$  tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný 0.

(Ján Mazák)

**C – I – 3**

V pravouhlom trojuholníku  $ABC$  s preponou  $AB$  označme postupne  $I$  a  $U$  stred kružnice jemu vpísanej a dotykový bod tejto kružnice s odvesnou  $BC$ . Určte, aký je pomer  $|AC| : |BC|$ , ak sú uhly  $CAU$  a  $CBI$  zhodné.

(Jaroslav Zhouf)

**C – I – 4**

Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a + bc}{a + b} + \frac{b + ca}{b + c} + \frac{c + ab}{c + a},$$

ak sú  $a, b, c$  kladné reálne čísla so súčtom 1.

(Michal Rolínek, Pavel Calábek)

**C – I – 5**

Daný je trojuholník  $ABC$  s ťažiskom  $T$ . Na priamkach  $AT$  a  $BT$  sú zvolené postupne body  $E$  a  $F$  tak, že štvoruholník  $TECF$  je rovnobežník. Dokážte, že úsečky  $AC$  a  $BC$  delia úsečku  $EF$  na tri zhodné časti.

(Tomáš Jurík)

**C – I – 6**

Na tabuli je napísaných niekoľko prirodzených čísel od 1 do 100, pričom žiadne z nich nie je deliteľné dvojciferným prvočíslom a súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

a) Určte najväčší možný počet čísel na tabuli.

b) Určte najväčší možný súčet čísel na tabuli.

(Jaromír Šimša)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY  
Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

## **70. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY**

### **Leták kategórií A, B, C – domáce kolo**

Autori úloh: Mgr. Patrik Bak, RNDr. Pavel Calábek, PhD.,  
RNDr. Mária Dományová, RNDr. Tomáš Jurík, PhD.,  
doc. RNDr. Ján Mazák, PhD., Martin Melicher, Marián Poturnay,  
Mgr. Jozef Rajník, Mgr. Michal Rolínek, PhD.,  
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,  
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

Recenzenti: Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,  
RNDr. Tomáš Jurík, PhD., doc. RNDr. Ján Mazák, PhD.,  
Martin Melicher

Redakčná úprava: Mgr. Peter Novotný, PhD.

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020