70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

---

1. *Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je*
a) päť;
b) sedem. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

Riešenie. a) Pre prvočísla p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 napísané na tabuli podľa zadania platí

$$p_1p_2p_3p_4p_5 = 105(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5). \tag{1}$$

Keďže číslo na pravej strane (1) je násobkom čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, niektoré tri z piatich prvočísel na ľavej strane (1) sa rovnajú 3, 5 a 7. Bez ujmy na všeobecnosti tak môžeme predpokladať, že platí $p_3 = 3$, $p_4 = 5$ a $p_5 = 7$. Rovnosť (1) sa potom po dosadení a vydelení oboch strán číslom 105 zjednoduší na

$$p_1p_2 = p_1 + p_2 + 15.$$

Takú rovnicu s neznámymi celými číslami p_1, p_2 štandardnou úpravou prevedieme na súčinový tvar

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 16. \tag{2}$$

V našej úlohe sú p_1, p_2 prvočísla, takže oba činitele $p_1 - 1$ a $p_2 - 1$ sú prirodzené čísla. Určite môžeme označenie voliť tak, aby platilo $p_1 \geqq p_2$, a teda aj $p_1 - 1 \geqq p_2 - 1$.

Číslo 16 z pravej strany (2) možno rozložiť na súčin dvoch prirodzených čísel $a = p_1 - 1$, $b = p_2 - 1$ spĺňajúcich podmienku $a \geqq b$ práve týmito spôsobmi: $16 \cdot 1$, $8 \cdot 2$ a $4 \cdot 4$. Týmto rozkladom postupne zodpovedajú dvojice (p_1, p_2) rovné $(17, 2)$, $(9, 3)$, $(5, 5)$. Iba prostredná z nich nie je dvojicou prvočísel. Doplnením oboch krajných dvojíc o trojicu $(3, 5, 7)$ z úvodnej časti riešenia dostaneme jediné dve riešenia časti a) úlohy, ktoré teraz zapíšeme kvôli prehľadnosti ako pätice prvočísel v neklesajúcom poradí: $2, 3, 5, 7, 17$ a $3, 5, 5, 5, 7$.

b) V tomto prípade má pre prvočísla p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 napísané na tabuli platiť rovnosť

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 = 105(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7).$$

Podobne ako v časti a) usúdime, že bez ujmy na všeobecnosti sú p_5, p_6 a p_7 prvočísla 3, 5 a 7 a že nám tak ostáva riešiť rovnicu

$$p_1p_2p_3p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 15. \tag{3}$$

Určite môžeme predpokladať, že p_1 je najväčšie (prípadne jedno z najväčších) medzi číslami p_1, p_2, p_3, p_4. Keďže sa jedná o prvočísla, je každé z nich aspoň 2. Tým pádom môžeme odhadnúť ľavú aj pravú stranu rovnice (3) nasledovne:

$$p_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \leqq p_1p_2p_3p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 15 \leqq 4p_1 + 15.$$

Pre upravené krajné výrazy tak máme nerovnosť $8p_1 \leqq 4p_1 + 15$, odkiaľ $p_1 \leqq 3{,}75$, teda pre prvočíslo p_1 platí $p_1 \in \{2, 3\}$. Keďže sme za p_1 vybrali najväčšie z prvočísel p_1, p_2, p_3, p_4, je každé z nich rovné 2 alebo 3.

Predchádzajúcim odsekom sme celý postup riešenia rovnice (3) v obore prvočísel zredukovali len na overenie, ktoré zo štvoríc tvorených výlučne číslami 2 a 3 dotyčnej rovnici vyhovujú. Jedná sa o práve päť rôznych (neusporiadaných) štvoríc $(2, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 2, 3, 3)$, $(2, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3)$. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že vyhovuje jedine štvorica $(2, 2, 2, 3)$. Doplnením o úvodnú trojicu $(3, 5, 7)$ dostaneme (jediné) riešenie časti b) úlohy, ktorým je sedmica prvočísel $2, 2, 2, 3, 3, 5, 7$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad troch prvočísel. [Riešenie neexistuje. Súčin vyhovujúcich troch prvočísel je násobok čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, takže tieto prvočísla musia byť 3, 5 a 7. Pritom však $3 \cdot 5 \cdot 7 \neq 105 \cdot (3 + 5 + 7)$.]

N2. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad štyroch prvočísel. [Riešenie neexistuje. Podobne ako v N1 tri z prvočísel musia byť 3, 5, 7 a pre štvrté prvočíslo p má platiť rovnica $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p = 105 \cdot (3 + 5 + 4 + p)$, ktorú zjavne žiadne prvočíslo p nespĺňa.]

N3. Nájdite všetky trojice prvočísel také, že ich súčin je sedemnásobkom ich súčtu. [Úloha má jediné riešenie, trojicu 3, 5, 7. Podobne ako v N1 dokážte, že jedno z prvočísel je 7. Pre zvyšné dve, označme ich p a q, má platiť $7pq = 7(p+q+7)$, čo upravíme postupne na $pq = p + q + 7$, ďalej na $p(q - 1) = (q - 1) + 8$ a napokon na $(p - 1)(q - 1) = 8$. Pri označení takom, že $p \geqq q$, čiže $p - 1 \geqq q - 1$, máme možnosti $(p - 1, q - 1) = (8, 1)$ alebo $(p - 1, q - 1) = (4, 2)$. Iba druhá vedie na dvojicu prvočísel.]

N4. Nájdite všetky celé čísla x a y, pre ktoré $3xy = 5x + 7y + 1$. [Štyri riešenia (x, y): $(-4, 1)$, $(2, -11)$, $(3, 8)$, $(15, 2)$. Po vynásobení tromi dostaneme rovnicu $9xy = 15x + 21y + 3$. Teraz už ju môžeme upraviť na súčinový tvar $(3x - a)(3y - b) = 3a + 3b$ s vhodnými celými číslami a a b, konkrétne $(3x - 7)(3y - 5) = 38$. Ostáva rozobrať všetky možnosti rozkladu čísla 38 na súčin dvoch celých čísel.]

N5. Nájdite všetky prirodzené čísla x, y a z, pre ktoré platí $xyz = x + y + z + 2$. [Až na poradie tri riešenia: $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$. Ak je nejaké z čísel x, y, z rovné 1, napríklad x, dostaneme rovnicu $yz = y+z+3$ s riešeniami $(2, 5)$ a $(3, 3)$ (podľa postupu z N4). Ak je naopak $\min(x, y, z) \geqq 2$ a napríklad $z = \max(x, y, z)$, platí $x + y + z + 2 \leqq 3z + 2$ a súčasne $xyz \geqq 4z$. Z toho vyplýva $4z \leqq 3z + 2$, čiže $z \leqq 2$, takže je teda nutne $x = y = z = 2$, a to je naozaj riešenie.]

D1. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad šiestich prvočísel. [Riešenie neexistuje. Podobne ako v N1 usúdime, že zo šiestich prvočísel tri sú 3, 5 a 7, ostatné, ktoré označíme x, y a z, spĺňajú rovnicu $xyz = x+y+z+15$. Ak je niektoré z prvočísel x, y, z rovné 2, postupom z riešenia N4 zistíme, že rovnica nemá prvočíselné riešenie. V opačnom prípade, keď $\min(x, y, z) \geqq 3$ a napríklad $z = \max(x, y, z)$, máme $9z \leqq xyz = x + y + z + 15 \leqq 3z + 15$, čiže $z \leqq 2{,}5$, a to je spor.]

D2. Vyriešte súťažnú úlohu pre prípad $n \geqq 8$ prvočísel. [Riešenie neexistuje pre žiadne $n \geqq 8$. Podobne ako v N1 sú tri prvočísla 3, 5 a 7, zvyšné označme $p_1, \dots, p_k$, pričom $k = n - 3$, teda $k \geqq 5$. Platí $p_1 \cdots p_k = p_1 + \cdots + p_k + 15$. Ak je napríklad $p_1 = \max(p_1, \dots, p_k)$, tak $2^{k-1}p_1 \leqq p_1 \cdots p_k = p_1 + \ldots + p_k + 15 \leqq k \cdot p_1 + 15$, teda $p_1(2^{k-1} - k) \leqq 15$. Indukciou sa však ľahko ukáže, že pre každé $k \geqq 5$ platí $2^{k-1} - k \geqq 11$, odkiaľ $p_1(2^{k-1} - k) \geqq 2 \cdot 11 = 22$, čo odporuje skôr odvodenej nerovnosti.]

D3. Nájdite všetky prvočísla x, y, z spĺňajúce rovnicu $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$. [Jediné riešenie $x = y = z = 3$. Nech najskôr niektoré z prvočísel x, y a z je rovné 2, napr. z. Potom platí $x^2 + y^2 = x + y + 16$. Ľahko overíme, že nemôže byť ani $x = 2$, a teda ani $y = 2$, a preto $\min(x, y) \geqq 3$. Vtedy $3x + 3y \leqq x^2 + y^2 = x + y + 16$, takže $x + y \leqq 8$, teda stačí otestovať dvojice (x, y) rovné $(3, 3)$ a $(5, 3)$, ktoré však nevedú k riešeniu. Prejdeme k druhému prípadu, keď $\min(x, y, z) \geqq 3$. Vtedy $3x + 3y + 3z \leqq x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$, takže $x + y + z \leqq 9$, teda nutne $x = y = z = 3$, čo je naozaj riešenie úlohy.]

D4. Nájdite všetky prvočísla x, y, z spĺňajúce rovnicu $xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35$. [Jediné riešenie $x = y = z = 5$. Ak je nejaké z prvočísel rovné 2 alebo 3, tak dosadením dostaneme rovnice podobné ako v N4, o ktorých sa rovnakým postupom presvedčíme, že nemajú žiadne prvočíselné riešenie. Predpokladajme preto ďalej, že $x \geqq y \geqq z \geqq 5$. Potom

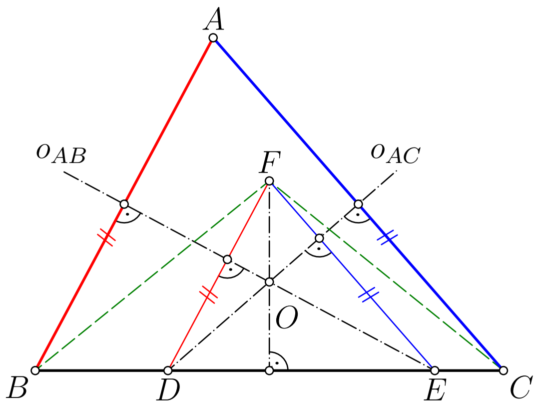
$$5xy \leqq xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35 \leqq 3xy + 3x + 35,$$

odkiaľ $x(2y-3) \leqq 35$. Zároveň však z $x \geqq 5$ a $2y-3 \geqq 2 \cdot 5 - 3 = 7$ vyplýva opačná nerovnosť $x(2y-3) \geqq 35$, takže nutne $x = y = 5$, a preto tiež $z = 5$, teda jediné možné riešenie je $x = y = z = 5$.]

---

2. *V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia na strane BC body D a E tak, že D je medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je taký bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokážte, že $|FB| = |FC|$.* (Patrik Bak)

Riešenie. Zadaná rovnosť $|AD| = |CD|$ znamená, že bod D je priesečník strany BC s osou o_{AC} strany AC. Podobne vďaka rovnosti $|AE| = |BE|$ je bod E priesečník strany BC s osou o_{AB} strany AB. Priesečník O týchto dvoch osí, ktorý označíme O (obr. 1), je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Dodajme, že podľa zadania platí $D \neq E$, a tak je bod O rôzny od bodov D a E. Preto môžeme ďalej vravieť o osiach o_{AC}, o_{AB} ako o priamkach DO, resp. EO.



Obr. 1

Zamerajme sa teraz na bod F. Tento je určený podmienkami rovnobežnosti $FD \parallel$ $\parallel AB$ a $FE \parallel AC$ (F tak zrejme leží vnútri $\triangle ABC$, a teda existuje $\triangle DEF$). Vzhľadom na $AB \perp EO$ a $AC \perp DO$ dostávame kolmosti vyznačené na obrázku: $FD \perp EO$ a $FE \perp DO$. Vyplýva z nich, že bod O je priesečníkom dvoch výšok trojuholníka DEF. Jeho tretia výška z vrcholu F teda leží na tej istej kolmici na priamku BC ako stred O opísanej kružnice. Inak povedané, bod F leží na osi strany BC, a preto platí rovnosť $|FB| = |FC|$, ktorú sme mali dokázať.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Uvedomte si, ako sa dokazuje školský poznatok, že osi strán ľubovoľného trojuholníka ABC sa pretínajú v jednom bode. [Označme O priesečník osí strán AB a AC. Podľa vlastnosti osí úsečiek nutne platí $|OA| = |OB|$ a $|OA| = |OC|$, takže $|OB| = |OC|$, čo naopak znamená, že bod O leží na osi strany BC.]

N2. Dokážete použitím poznatku o osiach strán z úlohy N1 odvodiť iný školský poznatok, že aj výšky ľubovoľného trojuholníka ABC sa (ako priamky) pretínajú v jednom bode? [Trojuholník ABC doplňte trikrát na rovnobežník $ABA'C$, $BCB'A$, resp. $CAC'B$. Potom body A, B, C sú stredy strán trojuholníka $A'B'C'$. Osi jeho strán sa pretínajú v jednom bode (podľa úlohy N1) a ležia na nich výšky pôvodného trojuholníka ABC.]

N3. Uvedomte si nasledujúcu ekvivalentnú formuláciu tvrdenia o existencii priesečníka výšok ľubovoľného trojuholníka ABC: Ak pre nejaký bod H roviny trojuholníka ABC platí $HB \perp AC$ a $HC \perp AB$, tak buď $H = A$, alebo $HA \perp BC$. [Bod H je priesečníkom dvoch výšok trojuholníka ABC a každá z relácií $H = A$, $HA \perp BC$ znamená, že bod H leží aj na tretej výške z vrcholu A.]

D1. Dokážte implikáciu z úlohy N3 metódou obvodových uhlov, aspoň pre prípad ostrouhlého trojuholníka ABC. [Nech teda $HB \perp AC$, $HC \perp AB$. Označme A' priesečník AH

a BC, B' priesečník BH a AC, a C' priesečník CH a AB. Štvoruholníky $AC'HB'$ a $BC'B'C$ sú tetivové vďaka pravým uhlom $\measuredangle AB'H$, $\measuredangle HC'A$, $\measuredangle BC'C$, $\measuredangle BB'C$. Preto $|\measuredangle BAA'| = |\measuredangle C'AH| = |\measuredangle C'B'H| = |\measuredangle C'B'B| = |\measuredangle C'CB|$. Trojuholníky BAA', BCC' sa preto zhodujú v dvoch vnútorných uhloch, takže sa zhodujú aj v treťom z nich: $|\measuredangle AA'B| = |\measuredangle BC'C| = 90°$. Odtiaľ už $HA \perp BC$.]

D2. V trojuholníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Nech S je taký bod osi uhla BAC, pre ktorý platí $|SB| = |SC|$. Dokážte, že bod S leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. [Pracovať priamo so zadaným bodom S je ťažké, a tak zvážime pomocný bod S', ktorým je priesečník $S' \neq A$ osi uhla BAC s kružnicou opísanou. Ako je dobre známe, platí $|S'B| = |S'C|$ (vyplýva to zo zhodnosti obvodových uhlov $S'AB$ a $S'AC$). Vďaka podmienke $|AB| \neq |AC|$ je spoločný bod S osi uhla BAC a osi strany BC jediný, a tak platí $S' = S$.]

D3. V trojuholníku ABC so stredom I kružnice vpísanej platí $|AB| < |AC|$. Nech D je bod strany AC taký, že $|AB| = |AD|$. Dokážte, že body B, C, D, I ležia na jednej kružnici. [Polpriamka AI je os uhla BAC, a teda aj os uhla BAD, ktorá je vďaka podmienke $|AB| = |AD|$ zároveň aj osou úsečky BD. Bod I je teda pre trojuholník BCD takým bodom osi uhla BCD, pre ktorý platí $|IB| = |ID|$. Keďže navyše $|CB| \neq |CD|$ (lebo $|CD| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| < |CB|$ podľa trojuholníkovej nerovnosti), je možné použiť výsledok úlohy D2, podľa ktorého leží bod I na kružnici opísanej trojuholníku BCD. Iné riešenie: Stačí ukázať, že oba uhly BIC a BDC majú veľkosť $90° + \frac{1}{2}\alpha$, kde ako zvyčajne $\alpha = |\measuredangle BAC|$.]

---

3. *Ak sú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Keďže a, b, c sú navzájom rôzne kladné čísla, sú také aj čísla ab, bc, ca, lebo napríklad z $ab = bc$ vyplýva $a = c$ (vďaka $b \neq 0$). Vidíme tak, že v skúmanej sedmici čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc sú aspoň 3 rôzne hodnoty. Dokážeme najskôr sporom, že práve 3 hodnoty to nikdy byť nemôžu. Potom uvedieme príklad skúmanej sedmice, ktorá je zložená iba zo 4 rôznych hodnôt.

Najskôr teda pripusťme, že v niektorej sedmici sú práve 3 rôzne hodnoty. Vieme, že sú to hodnoty troch súčinov ab, bc, ca, a tak súčin abc sa musí rovnať jednému z nich. Znamená to, že jedno z čísel a, b, c je rovné 1, lebo napríklad z $abc = ab$ vyplýva $c = 1$.

Bez ujmy na všeobecnosti sa ďalej obmedzíme na prípad $c = 1$. Dotyčnú sedmicu s tromi rôznymi hodnotami potom môžeme zredukovať na šesticu s rovnakou vlastnosťou, ktorá je zložená z čísel

$$a+b,\ a+1,\ b+1,\ ab,\ a,\ b$$

(dosadili sme $c = 1$ a vynechali číslo abc rovné ab). Keďže už sú vylúčené rovnosti $a = 1$ a $b = 1$, tri rôzne hodnoty sú zastúpené ako v prvej trojici $a+b$, $a+1$, $b+1$, tak aj v druhej trojici ab, a, b. Obe čísla a, b z druhej trojice preto musia ležať v množine $\{a+b, a+1, b+1\}$. To možno dosiahnuť jedine tak, že platí $a = b+1$ a súčasne $b = a+1$, a to je nemožné. Dôkaz sporom je ukončený.

Ako sme sľúbili, v druhej časti riešenia uvedieme príklad skúmanej sedmice, ktorá je zložená zo 4 rôznych hodnôt. Podľa predchádzajúcich pozorovaní sa vyplatí preskúmať situáciu, keď platí povedzme $c = 1$ a zároveň $b = a + 1$. Vtedy máme

$$(a+b, b+c, c+a) = (2a+1, a+2, a+1) \quad \text{a} \quad (ab, bc, ca, abc) = \big(a^2+a, a+1, a, a^2+a\big).$$

Stačí teda nájsť také kladné číslo $a \neq 1$, aby v pätici čísel

$$a,\ a+1,\ a+2,\ 2a+1,\ a^2+a$$

boli iba štyri rôzne hodnoty. Vzhľadom na zrejmé nerovnosti, ktoré pre uvažované a medzi týmito piatimi číslami platia, sa na splnenie požiadavky ponúkajú práve dve možnosti. Sú vyjadrené rovnicami

$$a^2 + a = 2a + 1, \quad \text{resp.} \quad a^2 + a = a + 2.$$

Obe naozaj vedú k vyhovujúcim trojiciam, ktoré sú tvaru

$$(a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2}, 1\right), \quad \text{resp.} \quad (a, b, c) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}+1, 1\right).$$

Záver. Najmenší možný počet rôznych čísel v skúmanej sedmici je rovný 4.

Poznámka. Ak nebudeme rozlišovať trojice (a, b, c), ktoré sa líšia iba poradím svojich prvkov, existujú ďalšie dve prípustné trojice, pre ktoré sa v skúmanej sedmici nájdu iba 4 rôzne hodnoty. Prvá z nich je trojica

$$(a, b, c) = \left(a, \frac{a}{a-1}, \frac{a}{(a-1)^2}\right),$$

pričom $a > 0$ je jediný reálny koreň kubickej rovnice $a^3 - 4a^2 + 4a - 2 = 0$. Druhou vyhovujúcou trojicou je

$$(a, b, c) = \left(a, \frac{a}{a^2-a-1}, \frac{a(a-1)}{a^2-a-1}\right),$$

pričom a je väčší z dvoch kladných koreňov rovnice $a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 2a + 2 = 0$.[1]

Iné riešenie. Ešte jedným spôsobom dokážeme, že v skúmanej sedmici čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc musia byť aspoň 4 rôzne hodnoty. Využijeme pritom všeobecne užitočný obrat: vzhľadom na symetrické zastúpenie čísel a, b, c ich môžeme vopred usporiadať podľa veľkosti.

Budeme teda predpokladať, že pre (kladné) čísla a, b, c platí $a < b < c$ (podľa zadania sú rôzne). Potom zrejme tiež platí

$$a + b < a + c < b + c \quad \text{a} \quad ab < ac < bc. \tag{1}$$

Vidíme, že medzi spolu šiestimi číslami zapísanými v (1) sa nájdu aspoň 4 rôzne hodnoty, ak nenastane prípad, keď usporiadané trojice $(a + b, a + c, b + c)$ a (ab, ac, bc) splynú, t. j. bude splnená sústava rovníc

$$\begin{aligned} a + b &= ab, \\ a + c &= ac, \\ b + c &= bc. \end{aligned}$$

Ukážeme, že to nie je možné. Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme po jednoduchej úprave $(b - c)(1 - a) = 0$. To vzhľadom na $b \neq c$ znamená $a = 1$. Po dosadení do prvej rovnice ale dostaneme rovnicu $1 + b = b$, ktorá nemá riešenie.

[1] Prvá trojica je približne (2,8393; 1,5437; 0,8393), druhá (2,3322; 1,1069; 1,4746).

Tým je na úvod sľúbený dôkaz ukončený. Za povšimnutie stojí, že sme v ňom vôbec nepotrebovali posledné číslo abc zo sedmice $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc. Ukázali sme totiž, že aspoň 4 rôzne hodnoty sa vždy nájdu už medzi jej prvými šiestimi číslami.

Dodajme, že práve opísaný postup možno využiť aj pri hľadaní (všetkých) sedmíc zložených zo 4 rôznych hodnôt. Vyplýva z neho totiž, že takú sedmicu dostaneme práve vtedy, keď trojprvkové množiny $\{a+b, a+c, b+c\}$ a $\{ab, ac, bc\}$ sa budú zhodovať *v dvoch hodnotách* a keď potom hodnota abc bude rovná *jednej zo štyroch hodnôt* z oboch množín.[2] Teda napríklad dve usporiadané trojice (a, b, c) nájdené v závere prvého riešenia sú postupne riešeniami sústav rovníc

$$\begin{aligned} a+b&=ab, \\ a+c&=bc, \\ abc&=ab, \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} b+c&=ab, \\ a+c&=bc, \\ abc&=ab. \end{aligned}$$

Podobne usporiadané trojice (a, b, c) uvedené v poznámke za prvým riešením sú postupne riešeniami sústav rovníc

$$\begin{aligned} a+b&=ab, \\ b+c&=ac, \\ abc&=a+c, \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} a+b&=ac, \\ b+c&=ab, \\ abc&=a+c. \end{aligned}$$

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

Vo všetkých úlohách budú a, b, c navzájom rôzne kladné reálne čísla.

N1. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$. [Jedná sa vždy o štyri rôzne čísla. Určite možno predpokladať, že $0 < a < b < c$. Potom ale $a+b < a+c < b+c < a+b+c$.]

N2. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami ab, bc, ca, abc. [Tri. Určite možno predpokladať, že $0 < a < b < c$. Potom ale $ab < ac < bc$, takže aspoň tri rôzne hodnoty existujú vždy. Práve tri rôzne hodnoty to budú práve vtedy, keď číslo abc bude rovné jednému z čísel ab, ac, bc, t. j. práve keď bude $1 \in \{a, b, c\}$.]

N3. Určte najmenší počet rôznych čísel medzi číslami $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v prípade, keď navyše sú čísla a a b rôzne od 1? [Tri a možný počet to je aj v prípade $a \neq 1 \neq b$. Vzhľadom na symetriu zadania v premenných a a b môžeme predpokladať, že $a < b$. Keďže $b < b+1$, sú a, b, $b+1$ tri rôzne hodnoty. Aby boli práve tri v celej pätici, musí platiť $a+1 = b$ a v prípade $a \neq 1 \neq b$ ešte musí byť $ab = b+1$. Obom rovnostiam vyhovujú čísla $a = \sqrt{2}$ a $b = \sqrt{2}+1$, ktoré sú rôzne od 1 a pre ktoré sú v pätici naozaj tri rôzne hodnoty.]

N4. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami ab, ac, $a+b$, $a+c$. [Tri. Keďže $ab \neq ac$ a aj $a+b \neq a+c$, máme aspoň 2 rôzne hodnoty. Pripusťme, že máme práve 2 rôzne hodnoty v celej štvorici. Potom máme dve možnosti: buď $ab = a+b$ a $ac = a+c$, alebo $ab = a+c$ a $ac = a+b$. V prvom prípade po odčítaní oboch rovností dostaneme $(a-1)(b-c) = 0$, odkiaľ $a = 1$, a to je spor s $ab = a+b$. V druhom prípade po podobnom odčítaním dostaneme $(a+1)(b-c) = 0$, a to je tiež spor. Preto vždy máme aspoň 3 rôzne hodnoty, a tento počet neprekročíme, ak bude platiť $ab = a+b$, čo spĺňa napríklad trojica $(a, b, c) = (3, \frac{3}{2}, 1)$. Dodajme, že postup sme mohli zjednodušiť využitím symetrie zadania v premenných b a c, vďaka ktorej môžeme predpokladať, že $b < c$. Vtedy platí $ab < ac$ a $a+b < a+c$, takže stačí rozobrať iba prvý z dvoch vyššie rozlíšených prípadov.]

D1. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$. [Dve. Úloha sa nezmení, keď trojicu (a, b, c) zameníme ľubovoľnou z trojíc (b, c, a) a (c, a, b). Preto môžeme predpokladať, že platí $a = \max\{a, b, c\}$. Potom $2a > b+c$, čiže $c+2a > > b+2c$. Tým pádom v našej trojici máme aspoň dve rôzne hodnoty. Pre nájdenie

[2] Všimnite si, že tieto podmienky sú v premenných a, b, c symetrické.

trojice s práve dvoma rôznymi hodnotami položme napríklad $c+2a = a+2b$. To dáva $a = 2b - c$. Teda napríklad pre $c = 1$, $b = 2$ vyjde $a = 3$. Vtedy $(a + 2b, b + 2c, c + 2a) = (7, 4, 7)$.]

D2. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a + b$, $b + c$, $c + a$, $ab + 1$, $bc + 1$, $ca + 1$, abc. [Štyri. Vďaka symetrii môžeme predpokladať, že $a > b > c$. Potom $a+b > a+c > b+c$ a $ab+1 > ac+1 > bc+1$, takže v zadanej sedmici sú vždy aspoň tri rôzne hodnoty. Keby boli práve tri, tak by nutne platilo $a+b = ab+1$, $a+c = ac+1$ a $b+c = bc+1$. To upravíme na $(a-1)(b-1) = 0$, $(a-1)(c-1) = 0$ a $(b-1)(c-1) = 0$. Nutne sa teda dve z čísel a, b, c rovnajú 1, a to je spor. V našej sedmici teda máme vždy aspoň 4 rôzne hodnoty, a tento počet neprekročíme, keď napríklad zvolíme $a = 1$ a budeme požadovať, aby platilo $bc = b+c$, čo napríklad spĺňa dvojica $(b, c) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$.]

D3. Určte najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \quad \frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

[Štyri. Jednotlivé čísla sú rôzne druhy priemerov zostavené pre tú istú trojicu čísel a, b, c. Označme zľava doprava ich hodnoty K, A, G, H podľa ich názvov *kvadratický*, resp. *aritmetický*, resp. *geometrický*, resp. *harmonický* priemer. Ako je známe, medzi týmito priemermi pre ľubovoľnú trojicu kladných čísel a, b, c platia nerovnosti $K \geqq A \geqq G \geqq H$, pričom všetky nerovnosti sú ostré s výnimkou prípadu, keď platí $a = b = c$. (Dôkazy týchto nerovností možno nájsť v brožúre *A. Kufner: Nerovnosti a odhady*, dostupnej na www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403877.)]

---

4. *Najväčšieho deliteľa d prirodzeného čísla $n > 1$ s vlastnosťou $d < n$ nazveme jeho superdeliteľom.*

a) Dokážte, že každé prirodzené číslo $d > 1$ je superdeliteľom iba konečného počtu čísel.

b) Označme $s(d)$ súčet všetkých čísel, ktorých superdeliteľom je dané číslo $d > 1$. Rozhodnite, či existuje nepárne číslo $d > 1$ také, že $s(d)$ je násobkom čísla 2 020.

(*Michal Rolínek*)

Riešenie. Najskôr sa s novým pojmom *superdeliteľ* bližšie zoznámime. O číslach a ich deliteľoch budeme v celom riešení predpokladať, že to sú celé kladné, t. j. prirodzené čísla.

Majme dané číslo $n > 1$. Číslo a je jeho deliteľ práve vtedy, keď platí $n = ab$ pre vhodné číslo b, ktoré potom je teda tiež deliteľom čísla n (môže platiť aj $a = b$). Určite pre také čísla a, b (združené podmienkou $n = ab$) platí: čím väčšie je a, tým menšie je b. Keďže špeciálne pre $a = n$ je $b = 1$, najväčšiemu deliteľovi a s vlastnosťou $a < n$, t. j. superdeliteľovi d čísla n, bude zodpovedať najmenší deliteľ b s vlastnosťou $b > 1$ – a tým je určite *najmenší prvočiniteľ*[3] p daného čísla n. S jeho superdeliteľom d je teda toto prvočíslo p zviazané rovnosťou $pd = n$. Na určenie superdeliteľa daného čísla tak stačí nájsť jeho najmenší prvočiniteľ a tým potom dané číslo vydeliť. Napríklad superdeliteľom každého párneho čísla $2k$ je číslo $2k : 2 = k$.

Teraz už sme pripravení posúdiť otázku, ako vyzerajú všetky čísla n, ktorých superdeliteľom je dané číslo $d > 1$. Podľa predchádzajúceho výkladu to budú práve tie n, ktoré sú tvaru $n = pd$, pričom prvočíslo p je volené tak, aby bolo najmenším prvočiniteľom vzniknutého čísla n, teda čísla pd. Čo podmienka „p je najmenším prvočiniteľom čísla pd“ znamená? Zrejme práve to, že prvočíslo p neprevyšuje žiadneho z prvočiniteľov daného čísla d. Vďaka predpokladu $d > 1$ nie je množina prvočiniteľov čísla d prázdna,

[3] Pripomeňme, že termín *prvočiniteľ* znamená *prvočíselný deliteľ*.

a tak odvodenú podmienku spĺňa iba niekoľko prvých najmenších prvočísel p (všetky až po najväčší prvočiniteľ daného d vrátane).[4] Tým je časť a) úlohy vyriešená.

Podľa predchádzajúceho odseku pre súčet $s(d)$ všetkých čísel s daným superdeliteľom d platí vzorec

$$s(d) = 2d + 3d + \cdots + p_l d = (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)d,$$

pričom $2 = p_1 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \ldots < p_l$ je skupina prvých l prvočísel končiaca najmenším prvočiniteľom p_l daného čísla $d > 1$. Úlohou časti b) úlohy je preto rozhodnúť, či existuje nejaké nepárne číslo $d > 1$, pre ktoré platí relácia

$$2\,020 \mid (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)d. \tag{1}$$

Existenciu takého čísla d potvrdíme príkladom, ktorý nájdeme, keď budeme postupne odvodzovať, aké vlastnosti musí každé vyhovujúce číslo d všeobecne mať.[5]

Keďže nepárne číslo d je nesúdeliteľné s číslom 4, ktoré je deliteľom čísla 2 020, vyplýva z (1) relácia

$$4 \mid p_1 + p_2 + \cdots + p_l.$$

Z toho vyplýva $l \geqq 4$ (čísla 2, $2 + 3 = 5$ a $2 + 3 + 5 = 10$ totiž nie sú číslom 4 deliteľné). Pre najmenší prvočiniteľ p_l čísla d tak platí $p_l \geqq p_4 = 7$, a preto $5 \nmid d$. Nepárne číslo d je teda nesúdeliteľné s deliteľom 20 čísla 2 020. Preto z (1) vyplýva relácia

$$20 \mid p_1 + p_2 + \cdots + p_l. \tag{2}$$

Nebudeme tu vypisovať postupné dosadzovanie hodnôt $l = 3, 4, \ldots$, ktoré vedie k zisteniu, že najmenšie číslo l spĺňajúce reláciu (2) je $l = 9$:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_9 = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100. \tag{3}$$

Pokúsme sa už teraz nájsť vyhovujúce číslo d medzi číslami s najmenším prvočiniteľom $p_9 = 23$. Po dosadení súčtu (3) do (1) zistíme, že také čísla d majú spĺňať podmienku

$$2\,020 \mid 100d, \quad \text{čiže (po krátení číslom 20)} \quad 101 \mid 5d.$$

Keďže 101 je prvočíslo, posledná relácia bude platiť práve vtedy, keď číslo d bude mať okrem (najmenšieho) prvočiniteľa 23 aj prvočiniteľa 101. Za vyhovujúce číslo d preto môžeme zvoliť $d = 23 \cdot 101 = 2\,323$. Tým je riešenie časti b) úlohy ukončené.

Poznámka. Použitím počítača možno zistiť, že podmienku $2\,020 \mid s(d)$ spĺňajú aj niektoré (veľké) prvočísla d. Okomentujme výsledok, že najmenšie z nich je $d = 10\,663$. Z nášho riešenia vyplýva, že pre každé prvočíslo d platí vzorec

$$s(d) = (2 + 3 + 5 + \ldots + d) \cdot d,$$

v ktorom sa sčítajú všetky prvočísla od 2 do d vrátane. Pre $d = 10\,663$ je tento súčet rovný $6\,480\,160 = 3\,208 \cdot 2\,020$, a tak je hodnota $s(10\,663)$ naozaj deliteľná číslom 2 020.

Dodajme ešte, že reláciu $2\,020 \mid s(d)$ nespĺňa „nádejné" prvočíslo $d = 101$, lebo súčet všetkých prvočísel od 2 do 101 je rovný číslu 1 161, ktoré nie je deliteľné číslom 20, ako by sme podľa súčinu zo vzorca pre $s(d)$ potrebovali.

---

[4] V prípade $d = 1$ vyhovuje každé prvočíslo p, a preto platí: Superdelitele 1 majú práve tie čísla, ktoré sú prvočísla. Tých je nekonečne veľa, a tak bez podmienky $d > 1$ tvrdenie a) neplatí.

[5] Bez podmienky, že číslo $d > 1$ je nepárne, by taká úloha bola triviálna: pre párne číslo $d = 1\,010$ je $p_l = 2$, a tak platí $s(d) = 2d = 2\,020$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Pripomeňme, že prvočiniteľom čísla n nazývame každé prvočíslo, ktoré číslo n delí.

N1. Uvedomte si, že superdeliteľom daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, pričom p je najmenší prvočiniteľ čísla n. [Ak je d deliteľ čísla n, je jeho deliteľom aj číslo $\frac{n}{d}$. Najmenšie dva delitele n sú 1 a p, ktorým zodpovedajú dva jeho najväčšie delitele $\frac{n}{1}$ a $\frac{n}{p}$.]

N2. Určte všetky prirodzená čísla, ktorých superdeliteľom je číslo 2. [Jedine číslo 4. Každé hľadané číslo n je nutne párne, a tak je číslo 2 jeho najmenší prvočiniteľ. Podľa výsledku N1 teda platí $2 = \frac{n}{2}$, a preto $n = 4$.]

N3. Určte všetky prirodzené čísla, ktorých superdeliteľom je číslo 7. [14, 21, 35 a 49. Každé hľadané n je deliteľné siedmimi a podľa výsledku N1 má platiť $7 = \frac{n}{p}$, pričom p je najmenší prvočiniteľ n, takže $p \leqq 7$, čiže $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.]

D1. Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, že keď k nim pripočítame ich superdeliteľa, dostaneme súčet 2 020. [1 515 a 1 919. Ak je p najmenší prvočiniteľ čísla n, tak $n = dp$, pričom d je superdeliteľ n. Má platiť $dp + d = 2020$, čiže $d(p + 1) = 2020$, takže ostáva prebrať všetky delitele d čísla 2 020 s prvočíselným rozkladom $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Pre $d = 1$ vychádza $p = 2019$, čo nie je prvočíslo. Keby bolo $d > 1$ párne, bolo by párne aj číslo n, a tak by bolo $p = 2$, a teda $d(2 + 1) = 2020$, čo nie je možné. Ostávajú preto možnosti $d \in \{5, 101, 505\}$. Postupným dosadením do $d(p + 1) = 2020$ zistíme, že riešenie dáva iba hodnota $d = 101$, ktorej zodpovedá $p = 19$, a hodnota $d = 505$, pre ktorú vychádza $p = 3$. (V oboch prípadoch je naozaj nájdené p najmenším prvočiniteľom súčinu $n = dp$.)]

D2. Ktoré z čísel $2, 3, \ldots, 20$ je superdeliteľom najväčšieho počtu čísel? [Číslo 19. Hľadáme to číslo $n \in \{2, 3, \ldots, 20\}$, pre ktoré existuje čo najviac prvočísel p takých, že najmenší prvočiniteľ čísla np je práve p. Keďže $n > 1$, musí pre každé prvočíslo p s uvedenou vlastnosťou platiť $p \leqq n$, a teda aj $p \leqq 20$, takže takých prvočísel nemôže byť viac, ako je všetkých prvočísel do 20, ktorých je 8. Aby ich bolo práve 8, musel by aj súčin $19n$ mať najmenšieho prvočiniteľa 19, čo z uvažovaných čísel n spĺňa jedine $n = 19$. Toto číslo je naozaj superdeliteľom ôsmich čísel $19 \cdot 2$, $19 \cdot 3$, $19 \cdot 5, \ldots$, $19 \cdot 19$.]

D3. Ktoré prirodzené číslo najbližšie k číslu 2 020 má svojho superdeliteľa medzi číslami $1, 2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 2 017. Číslo 1 je superdeliteľom každého prvočísla. Najbližšie prvočíslo k číslu 2 020 je 2017. Výpočtom superdeliteľov čísel $2\,018, 2\,019, \ldots, 2\,023$ zistíme, že žiadny z nich nepatrí medzi čísla zo zadania.]

D4. Ktoré prirodzené číslo najbližšie k číslu 2 020 má svojho superdeliteľa medzi číslami $2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 1 849. Najväčším číslom n s daným superdeliteľom $d > 1$ je číslo $n = dp$, pričom p je najmenší prvočiniteľ čísla d. Z toho vyplýva, že ak $1 < d \leqq 43$, pre každé číslo n so superdeliteľom d platí $n \leqq d^2 \leqq 43^2 = 1\,849$, pritom číslo 1 849 má za superdeliteľa prvočíslo 43. Ďalej najväčšie číslo so superdeliteľom 44 je rovné $44 \cdot 2 = 88$, najväčšie číslo so superdeliteľom 45 je rovné $45 \cdot 3 = 135$.]

---

5. *V trojuholníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupne stredy jeho strán BC, CA, AB. Dokážte, že pre ľubovoľný bod X rôzny od bodov S_a, S_b, S_c platí*

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Náš postup založíme na využití tzv. Apollóniových kružníc. Uveďme preto o nich najskôr základné poučenie. Dôkazy uvedených poznatkov aj niektoré využitie týchto kružníc sú vyložené v časti I kapitoly 5 brožúry *S. Horák: Kružnice*, dostupnej na dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589.

Majme dané kladné reálne číslo $\lambda \neq 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Potom platí, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú rovnici

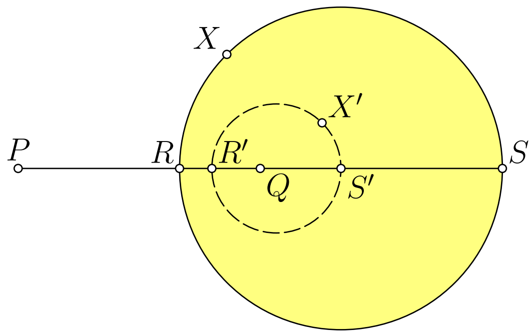
$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je istá kružnica. Hovoríme jej Apollóniova a my teraz tiež opíšeme jej konštrukciu. Obmedzíme sa pritom na prípad $\lambda > 1$, lebo v prípade $\lambda < 1$ možno prehodením bodov P a Q zmeniť parameter λ rovnice (1) na hodnotu $1/\lambda > 1$.

Konštrukciu Apollóniovej kružnice (1) zahájime tak, že najskôr určíme jej priesečníky s priamkou PQ. Budú nimi jeden vnútorný bod R úsečky PQ a jeden vnútorný bod S polpriamky opačnej k polpriamke QP.[6] Zopakujme, že takto lokalizované body R a Q sú jednoznačne určené rovnosťami

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|PS|}{|QS|} = \lambda$$

(pozri obr. 2 pre hodnotu $\lambda = 2$). Potom platí, že Apollóniovou kružnicou (1) je kružnica



Obr. 2

nad priemerom RS.

S ohľadom na súťažnú úlohu, ktorú ešte len začneme riešiť, je na obr. 2 vyfarbený kruh, ktorý Apollóniova kružnica (1) ohraničuje. Ukážeme, že vnútri tohto kruhu za nášho predpokladu $\lambda > 1$ leží každý bod $X' \in \varrho$, pre ktorý platí

$$\frac{|PX'|}{|QX'|} > \lambda. \tag{2}$$

Naozaj, každý taký bod X' bude spĺňať rovnicu tvaru (1), v ktorej hodnotu λ zameníme za väčšiu hodnotu λ' rovnú zlomku $|PX'|/|QX'|$. Bod X' potom leží na novej Apollóniovej kružnici pre určený parameter λ', ktorá je vykreslená na obr. 2. Je to kružnica nad priemerom $R'S'$, pritom vďaka nerovnosti $\lambda' > \lambda$ sa ľahko vysvetlí, že body R' a S' ležia postupne vnútri úsečiek RQ a QS. Preto nová kružnica pre parameter λ' leží vnútri kruhu ohraničeného pôvodnou kružnicou pre parameter λ. Tým je sľúbený dôkaz ukončený.[7]

Po prevedenej príprave už môžeme prejsť k vlastnej súťažnej úlohe a podať jej vcelku krátke riešenie. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Budeme teda predpokladať, že zadaná nerovnosť neplatí. Potom pre niektorý bod X sú všetky tri podiely

$$\frac{|XA|}{|XS_a|}, \ \frac{|XB|}{|XS_b|}, \ \frac{|XC|}{|XS_c|}$$

---

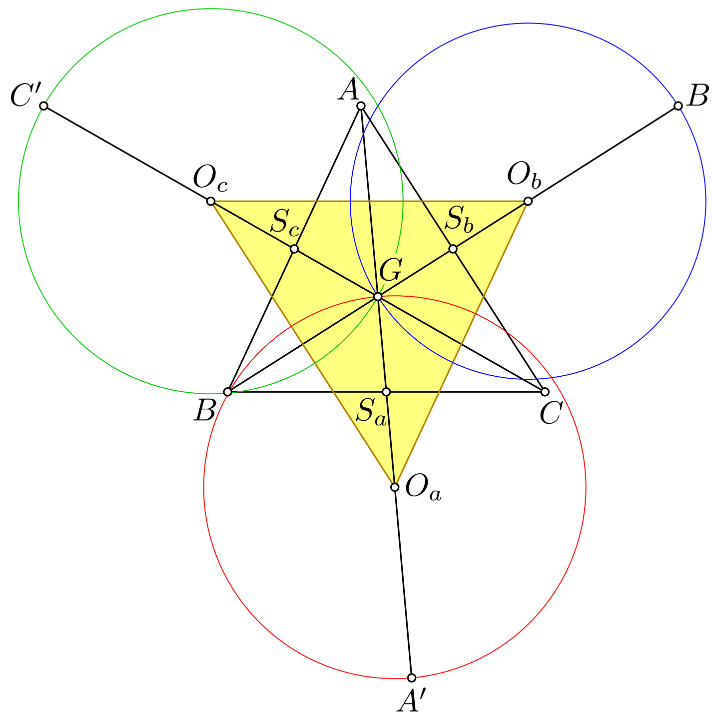
6 Taká poloha bodu S zodpovedá nášmu predpokladu $\lambda > 1$.

7 Aj keď to nebudeme ďalej potrebovať, dodajme, že aj naopak *každý* bod X' rôzny od Q, ktorý leží vnútri dotyčného kruhu, spĺňa nerovnicu (2). Naozaj, keby pre číslo $\lambda' = |PX'|/|QX'|$ platilo $\lambda' < \lambda$, tak vďaka tomu, že zrejme platí $\lambda' > 1$, by sme mohli zopakovať úvahu z tohto odseku s dvojicou (λ, λ') zamenenou za (λ', λ) a dôjsť tak ku sporu.

väčšie ako 2. Podľa vyloženej teórie to znamená, že bod X leží vnútri troch kruhov, ktoré sú ohraničené Apollóniovými kružnicami s rovnicami

$$\frac{|XA|}{|XS_a|} = 2,\ \frac{|XB|}{|XS_b|} = 2,\ \frac{|XC|}{|XS_c|} = 2.$$

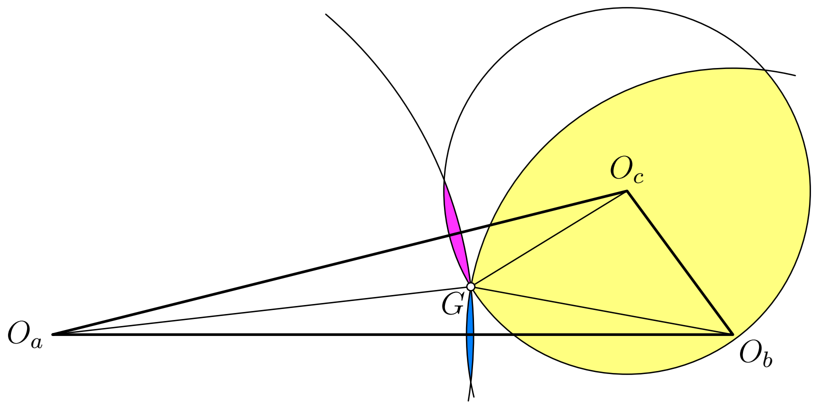
Všeobecná poučka o priemere Apollóniových kružníc pre naše tri kružnice s parametrom $\lambda = 2$ znamená, že ich priemery sú úsečky GA', GB' a GC', pričom bod G je ťažisko trojuholníka ABC a body A', B', C' sú postupne obrazy bodov A, B, C v stredových súmernostiach podľa S_a, S_b, S_c. Stredy týchto troch kružníc označíme postupne O_a, O_b, O_c.



Obr. 3

Ako obrázok napovedá, žiadny bod X nemôže ležať vnútri všetkých troch kruhov, ktoré zostrojené kružnice určujú. Aby sme túto hypotézu dokázali (a tak náš dôkaz sporom zavŕšili), uvedomíme si niekoľko skutočností: bod G je spoločným bodom všetkých troch kružníc a leží vnútri trojuholníka s vrcholmi v stredoch O_a, O_b a O_c, ktorý je na obr. 3 vyfarbený. Vyplýva to z toho, že tento trojuholník je zrejme obrazom trojuholníka ABC v stredovej súmernosti podľa jeho ťažiska G, a tak oba trojuholníky majú toto ťažisko spoločné. Konvexné uhly O_aGO_b, O_aGO_c a O_bGO_c pokrývajú celý trojuholník $O_aO_bO_c$ a ich zjednotením je plný uhol. Teda aspoň dva z nich musia byť tupé.[8]

[8] Keby dva uhly boli ostré, prípadne jeden z nich pravý (oba pravé byť nemôžu, pretože G je ťažisko, teda vnútorný bod trojuholníka $O_aO_bO_c$), zvyšný uhol by nebol konvexný.



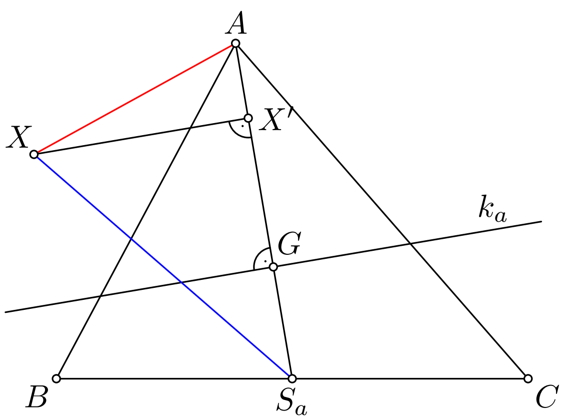
Obr. 4

Predpokladajme, že uhly O_aGO_b, O_aGO_c sú tupé (pozri obr. 3 a obr. 4 pre ostrouhlý a tupouhlý trojuholník, pre zvyšné možnosti sú úvahy obdobné). Potom prienik kruhov so stredmi O_a a O_b zrejme leží v uhle O_aGO_b[9] a prienik kruhov so stredmi O_a a O_c leží v uhle O_aGO_c. Prienik všetkých troch kruhov tak leží v prieniku oboch spomenutých uhlov, teda na polpriamke GO_a. Avšak kruh so stredom v bode O_b pretína vďaka tupému uhlu O_aGO_b polpriamku GO_a iba v bode G. Teda prienik všetkých troch kruhov obsahuje jediný bod, a to bod G. Tým je naša hypotéza dokázaná a riešenie je tak dokončené.

Iné riešenie. Vyložíme iný postup, ktorý nevyužíva Apollóniove kružnice. Namiesto nich budeme potrebovať pomocné tvrdenie, ktoré teraz sformulujeme a vzápätí dokážeme: *Nech G je ťažisko trojuholníka ABC a nech X je ľubovoľný bod polroviny p_a, ktorá obsahuje úsečku GA a ktorej hraničná priamka k_a je kolmica na túto úsečku vedená bodom G. Potom platí nerovnosť*

$$\frac{|XA|}{|XS_a|} \leqq 2. \tag{3}$$

Na dôkaz tohto tvrdenia využijeme bod X', ktorý je kolmým priemetom bodu X na polpriamku GA (obr. 5). Ak bod X' leží na úsečke AG, spĺňa nerovnosť



Obr. 5

[9] V tomto tupom uhle totiž leží prienik dvoch polrovín, ktoré sú určené dotyčnicami k hraničným kružniciam v spoločnom bode G, v ktorých dané dva kruhy po jednom ležia.

$$\frac{|X'A|}{|X'S_a|} \leqq \frac{|GA|}{|GS_a|} = 2. \tag{4}$$

V opačnom prípade je X' vnútorný bod polpriamky opačnej k polpriamke AG. Potom ale platí $|X'A| < |X'S_a|$, a tak je ľavá strana nerovnosti (4) dokonca menšia ako 1. Nerovnosť (4) preto platí v oboch prípadoch.

Použitím Pytagorovej vety a nerovnosti (4) upravenej na tvar $|X'A|^2 \leqq 4|X'S_a|^2$ dostaneme

$$\frac{|XA|^2}{|XS_a|^2} = \frac{|XX'|^2 + |X'A|^2}{|XX'|^2 + |X'S_a|^2} \leqq \frac{|XX'|^2 + 4|X'S_a|^2}{|XX'|^2 + |X'S_a|^2} \leqq \frac{4|XX'|^2 + 4|X'S_a|^2}{|XX'|^2 + |X'S_a|^2} = 4.$$

Po odmocnení krajných výrazov už dostaneme nerovnosť (3).

Ak porovnáme nerovnosť (3) z práve dokázaného tvrdenia s nerovnosťou zo zadania súťažnej úlohy, vidíme, že pre jej nové riešenie stačí dokázať, že každý bod roviny trojuholníka ABC leží v aspoň jednej z polrovín p_a, p_b, p_c, pričom p_b a p_c sú zrejmé analógie polroviny p_a. Využijeme to, že polroviny p_a, p_b, p_c sú tvorené práve tými bodmi X, ktoré postupne spĺňajú nerovnosti so skalárnymi súčinmi vektorov

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0, \quad \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0, \quad \text{resp.} \quad \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0.$$

Našou úlohou je ukázať, že pre každý bod X je aspoň jedna z týchto troch nerovností splnená. Vyplýva to však okamžite z toho, že súčet ich ľavých strán je rovný nule:

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GX} = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) \cdot \overrightarrow{GX} = 0,$$

lebo pre ťažisko G je súčet $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ rovný nulovému vektoru.

Poznámka. Použitím vektorovej algebry možno prehľadne vyložiť aj prvú časť druhého riešenia. Z všeobecne platných vektorových rovností

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{GX} - \overrightarrow{GA} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{S_AX} = \overrightarrow{GX} - \overrightarrow{GS_A} = \overrightarrow{GX} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

vyplývajú vyjadrenia

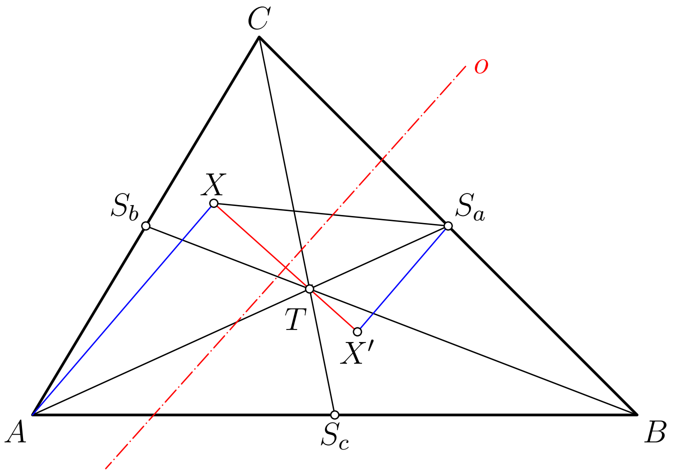
$$|AX|^2 = |GX|^2 + |GA|^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX}, \quad \text{resp.} \quad |S_AX|^2 = |GX|^2 + \tfrac{1}{4}|GA|^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX}.$$

Za predpokladu $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0$ z toho vyplýva $|AX|^2 \leqq 4|S_AX|^2$, ako pre naše riešenie potrebujeme.

Iné riešenie. Označme T ťažisko trojuholníka ABC a uvažujme rovnoľahlosť $\varkappa$ so stredom v bode T a koeficientom $-\frac{1}{2}$. Body S_a, S_b a S_c sú postupne obrazy bodov A, B a C v rovnoľahlosti $\varkappa$. Označme ďalej X' obraz bodu X v rovnoľahlosti $\varkappa$. Z vlastností rovnoľahlosti vyplýva $|XA| = 2|X'S_a|$, $|XB| = 2|X'S_b|$ a $|XC| = 2|X'S_c|$. Použitím týchto rovností dokazovanú nerovnosť upravíme na ekvivalentný tvar

$$\min\left\{\frac{|X'S_a|}{|XS_a|}, \frac{|X'S_b|}{|XS_b|}, \frac{|X'S_c|}{|XS_c|}\right\} \leqq 1. \tag{5}$$

V prípade $X = T$; $(= X')$ táto nerovnosť zrejme platí. Nech ďalej $X \neq T$, potom určite $X \neq X'$. Označme o os úsečky XX' (obr. 6). Predpokladajme, že nerovnosť (5) pre niektorý bod X neplatí, dostaneme tak $|X'S_a|/|XS_a| > 1$, $|X'S_b|/|XS_b| > 1$ a $|X'S_c|/|XS_c| > 1$. Z toho vyplýva, že body S_a, S_b a S_c sú vnútornými bodmi polroviny oX. Teda aj všetky body trojuholníka $S_aS_bS_c$ sú vnútornými bodmi tejto polroviny. To je ale spor, keďže jeho ťažisko T,[10] teda vnútorný bod, je zrejme bodom polroviny opačnej. Tým sme dostali spor s predpokladom, že nerovnosť (5) neplatí.



Obr. 6

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zoznámte sa s Apollóniovými kružnicami a ich konštrukciami. Sú to množiny bodov významnej vlastnosti, ktorá je v nasledujúcom tvrdení určená parametrom λ a bodmi P a Q: Majme dané kladné reálne číslo $\lambda \neq 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Potom platí, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú rovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je istá kružnica. Táto (Apollóniova) kružnica je kružnica nad priemerom MN, pričom M a N sú tie dva body priamky PQ, pre ktoré rovnica (1) po dosadení $X = M$, resp. $X = N$ sa zmení na platnú rovnosť. [Pozri časť I kapitoly 5 brožúry *S. Horák: Kružnice*, dostupnej na dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589. Iný podrobný výklad nájdete v návodných úlohách k úlohe 63-A-I-6.]

N2. Majme dané reálne číslo $\lambda > 1$ a dva rôzne body P a Q v rovine ϱ. Dokážte, že množinou všetkých bodov $X \in \varrho$, $X \neq Q$, ktoré vyhovujú nerovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} > \lambda,$$

je vnútro kruhu ohraničeného Apollóniovou kružnicou, ktorá je určená rovnicou (1) z úlohy N1. [Uvážte dve Apollóniove kružnice

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_1 > 1 \quad \text{a} \quad \frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_2 > 1.$$

Prvá z nich je kružnica nad priemerom M_1N_1, druhá je kružnica nad priemerom M_2N_2, pričom M_1N_1 a M_2N_2 sú isté úsečky na priamke PQ. Tvrdenie úlohy N2

[10] Toto známe tvrdenie vyplýva napríklad z uvažovanej rovnoľahlosti.

bude dokázané, keď vysvetlíme, prečo v prípade $\lambda_1 < \lambda_2$ ležia body M_2, N_2 vnútri úsečky M_1N_1.]

D1. V rovine ϱ je daná úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo priamky BC také, že veľkosti výšok v_b, v_c na strany AC, AB trojuholníka ABC sú v pomere $1:2$. Dokážte, že všetky tieto body A ležia na jednej kružnici. [Pre obsah S trojuholníka ABC platí $2S = b \cdot v_b = c \cdot v_c$, a teda $b : c = v_c : v_b = 2 : 1$. Vyhovujúce body A teda ležia na Apollóniovej kružnici $|CX|/|BX| = 2$.]

D2. V rovine ϱ je daná úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo priamky BC také, že veľkosti ťažníc t_b, t_c na strany AC, AB trojuholníka ABC sú v pomere $1:2$. Dokážte, že všetky tieto body A ležia na jednej kružnici. [Pre ťažisko G trojuholníka ABC platí $|BG| = \frac{2}{3}t_b$ a $|CG| = \frac{2}{3}t_c$, takže $|BG| : |CG| = 1 : 2$. Všetky body G teda ležia na jednej Apollóniovej kružnici, preto všetky body A ležia na jej obraze v rovnoľahlosti so stredom v strede úsečky BC, ktorá má koeficient 3.]

D3. V rovine sú dané dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pričom $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Nájdite množinu všetkých bodov X, ktoré neležia na priamke S_1S_2 a majú tú vlastnosť, že úsečky S_1X, S_2X pretínajú postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky S_1S_2 sa rovnajú. [63-A-II-2]

D4. V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. [63-A-I-6]

---

6. *Majme 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek vieme pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne zasvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?*

(Martin Melicher)

Riešenie. Počet žiaroviek n má v zadaní úlohy hodnotu 70. Zapíšeme celý postup tak, aby bolo jasné, že je použiteľný pre každé $n \geqq 5$.

V prvej časti riešenia budeme predpokladať, že máme pripravené prepínače tak, že s nimi možno rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek. Potom pre každú štvoricu žiaroviek existuje séria stlačení, ktorej aplikáciou nakoniec „prepneme“ (t. j. zmeníme stav rozsvietenia či zhasnutia) práve tieto 4 žiarovky. V ďalšom texte budeme písať o „prepínaní danej skupiny žiaroviek“ bez zdôrazňovania, že ostatné žiarovky pritom zostanú neprepnuté. Ak budeme uvažovať stlačenia prepínačov v niekoľkých sériách za sebou, budeme počítať zmeny stavov žiaroviek nie po jednotlivých stlačeniach, ale po jednotlivých sériách.

Keďže možno sériou stlačení prepnúť ľubovoľnú *štvoricu* žiaroviek, musí sa dať vhodnou sériou prepnúť aj ľubovoľná *dvojica* žiaroviek, povedzme (a, b) – uvážime za tým účelom ďalšie tri rôzne[11] žiarovky c, d, e a po prepnutí (a, c, d, e) nasledovanom prepnutím (b, c, d, e) dosiahneme zmenu stavu práve žiaroviek a, b (tie boli prepnuté každá raz, zatiaľ čo c, d, e každá dvakrát, ostatné žiarovky ani raz).

Keď možno (ako už vieme) sériou stlačení prepnúť ľubovoľnú *dvojicu* žiaroviek, musí sa dať prepnúť aj ľubovoľná *skupina s párnym počtom* žiaroviek – stačí ich spárovať do dvojíc a prepínať po nich. V ďalšom odseku vysvetlíme, prečo takých skupín je práve 2^{n-1}.

Chceme dokázať, že každá n-prvková množina má práve 2^{n-1} podmnožín s párnym počtom prvkov. Na to najskôr zvážime nejakých $n-1$ prvkov danej množiny. Každý z nich môžeme do zostavovanej podmnožiny buď zahrnúť, alebo nezahrnúť, takže podľa

[11] Tu potrebujeme predpoklad $n \geqq 5$. Ale pre $n = 4$ je úloha triviálna – stačí nám jeden prepínač, ktorý zmení stav všetkých štyroch žiaroviek.

pravidla súčinu máme pre tieto voľby práve 2^{n-1} možností. Počet takto vybraných prvkov je potom buď párne, alebo nepárne číslo. Podľa toho posledný, doposiaľ neuvažovaný prvok pôvodnej množiny k zatiaľ vybraným prvkom priradíme, resp. nepriradíme. Dostaneme tak 2^{n-1} rôznych podmnožín s párnym počtom prvkov. Keďže je zrejmé, že opísanou konštrukciou dostaneme *každú* z podmnožín s párnym počtom prvkov, je dôkaz ukončený.

Z doterajších úvah vyplýva, že pre každú vyhovujúcu skupinu prepínačov musíme ich postupným stláčaním dosiahnuť aspoň 2^{n-1} rôznych stavov rozsvietenia daných n žiaroviek. Zrejme nezáleží na tom, v akom poradí v danej sérii prepínače stláčame, lebo pri každej žiarovke hrá úlohu iba to, koľkokrát bola prepnutá. Navyše ani konkrétny počet prepnutí danej žiarovky nie je podstatný, výsledok záleží iba na tom, či je tento počet párny, alebo nepárny. Nemá preto zmysel uvažovať také série, kde je niektorý prepínač stlačený viackrát.[12] V jednej sérii pre každý prepínač tak budeme mať iba dve možnosti – nepoužiť, alebo použiť raz. Pri použití k prepínačov teda dosiahneme nanajvýš 2^k rôznych stavov rozsvietenia žiaroviek. Ak máme preto nimi dosiahnuť potrebných 2^{n-1} rôznych stavov, musí platiť nerovnosť $2^k \geqq 2^{n-1}$, čiže $k \geqq n-1$. (Pre danú hodnotu $n = 70$ to znamená, že $k \geqq 69$.)

V druhej časti riešenia ukážeme, že $k = n-1$ prepínačov na splnenie zadaného cieľa stačí. Očíslujme si žiarovky $1, 2, \ldots, n$ a prepínače $1, 2, \ldots, n-1$. Pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nastavme prepínač i tak, aby prepol (práve) žiarovky i a n. Dokážeme, že takým nastavením prepínačov dokážeme rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu žiaroviek (a, b, c, d), pričom $1 \leqq a < b < c < d \leqq n$.

V prípade $d < n$ úlohu splníme tak, že postupne stlačíme prepínače a, b, c a d – tým sa každá žiarovka zo štvorice (a, b, c, d) prepne práve raz, žiarovka n práve štyrikrát a ostatné žiarovky sa neprepnú ani raz.

Ako vyriešiť úlohu vo zvyšnom prípade $d = n$? Vtedy stačí stlačiť postupne prepínače a, b a c – tým prepneme žiarovky a, b, c práve raz, žiarovku n práve trikrát a ostatné žiarovky sa neprepnú ani raz.

Záver. Najmenší počet vyhovujúcich prepínačov je 69.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

Vo všetkých úlohách pracujeme s pojmami „žiarovka“ a „prepínač“ vo význame zo súťažnej úlohy.

N1. Určte počet možných stavov rozsvietenia žiaroviek 1, 2, 3 a 4, ktoré možno dosiahnuť použitím prepínačov $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ a $\{3, 4\}$ (napr. prepínač $\{3, 4\}$ vždy prepne práve žiarovky 3 a 4). [Štyri stavy (vrátane toho pôvodného). Uvedomme si, že poradie stláčania prepínačov v danej sérii nemá vplyv na celkový výsledok. Tiež nemá zmysel žiadny prepínač použiť v jednej sérii viackrát. Stačí teda nájsť výsledný stav pre každú z 2^3 podmnožín danej množiny 3 prepínačov, ktoré môžeme stlačiť, a potom spočítať, koľko týchto stavov je rôznych. Výhodné je pritom výsledné stavy určovať takto: $\{1, 2, 3\} + \{3, 4\} \sim \{1, 2, 4\}$. Z toho príkladu vidíme, že prepínač $\{1, 2, 4\}$ je možné v zadaní úlohy vynechať.]

N2. Dokážte, že ak máme n prepínačov, pričom n je prirodzené číslo, tak postupným prepínaním môžeme dosiahnuť nanajvýš 2^n rôznych stavov rozsvietenia (vrátane pôvodného). [Podľa úvahy z riešenia N1 platí, že počet dosiahnuteľných stavov neprevyšuje počet všetkých podmnožín danej množiny prepínačov.]

N3. Dokážte, že ak by v súťažnej úlohe bol cieľ pozmenený na možnosť rozsvietiť každú trojicu žiaroviek, tak pri jeho splnení by bolo možné rozsvietiť každú jednotlivú žiarovku. [Na rozsvietenie jedinej zvolenej žiarovky a vyberieme tri ďalšie žiarovky b, c, d a aplikujeme postupne 3 série rozsvietenia, a to pre trojice (a, b, c), (a, b, d) a (a, c, d).]

[12] Možno to tiež vysvetliť konštatovaním, že dve stlačenia toho istého prepínača sa navzájom rušia.

N4. Koľko má daná n prvková množina tých podmnožín, ktoré majú párny počet prvkov? [2^{n-1} podmnožín. Postupujeme podobne ako pri známom dôkaze, že počet *všetkých* podmnožín je 2^n: Prvých $n-1$ prvkov môžeme do konštruovanej podmnožiny buď zaradiť, alebo nezaradiť, takže máme 2^{n-1} možností. Po tejto procedúre máme vybraný buď párny, alebo nepárny počet prvkov, a tak podľa toho k nim nezaradíme, resp. zaradíme posledný n-tý prvok. Takto dostaneme práve 2^{n-1} vyhovujúcich podmnožín. Ostáva si uvedomiť, že opísaným postupom dostaneme *každú* vyhovujúcu podmnožinu.]

D1. Riešte súťažnú úlohu so 70 žiarovkami s pozmenenou podmienkou, že máme byť schopní rozsvietiť každú $2k$-ticu žiaroviek, pričom k je dané prirodzené číslo z intervalu $\langle 3, 34\rangle$. [Taká úloha je ekvivalentná so súťažnou úlohou. Nech ďalej (a, b) je ľubovoľná dvojica žiaroviek a c_i označuje žiarovky rôzne od a, b, pričom $c_i \neq c_j$ pre $i \neq j$. Ak možno rozsvietiť $2k$-tice $(a, c_1, \dots, c_{2k-1})$ a $(b, c_1, \dots, c_{2k-1})$, tak možno rozsvietiť aj dvojicu (a, b), a teda aj ľubovoľnú štvoricu (po dvoch dvojiciach). Naopak, ak možno rozsvietiť štvorice (a, c_1, c_2, c_3) a (b, c_1, c_2, c_3), možno rozsvietiť aj dvojicu (a, b), takže potom možno rozsvietiť aj každú $2k$-tici (po k dvojiciach).]

D2. Riešte súťažnú úlohu so 70 žiarovkami s pozmenenou podmienkou, že máme byť schopní rozsvietiť každú $(2k-1)$-ticu žiaroviek, pričom k je dané prirodzené číslo z intervalu $\langle 2, 35\rangle$. [70 prepínačov. Podobne ako v riešení D1 úvahou o dvoch $(2k-1)$-ticiach $(a, c_1, \dots, c_{2k-2})$ a $(b, c_1, \dots, c_{2k-2})$ zistíme, že možno rozsvietiť každú dvojicu (a, b). Teraz úvahou o jednej $(2k-1)$-tici $(a, c_1, \dots, c_{2k-2})$ a $k-1$ dvojiciach $(c_1, c_2), \dots, (c_{2k-3}, c_{2k-2})$ zistíme, že možno rozsvietiť ľubovoľnú žiarovku a, a teda aj každú z 2^{70} množín žiaroviek, takže podľa výsledku úlohy N2 potrebujeme aspoň 70 prepínačov. 70 prepínačov ale stačí – jeden prepínač na každú žiarovku.]

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020