

70. ročník Matematickej olympiády, 2020/2021

Úlohy krajského kola kategórie A

1. Koľko rôznych čísel môže byť medzi číslami

$$a + 2b, \quad a + 2c, \quad b + 2a, \quad b + 2c, \quad c + 2a, \quad c + 2b,$$

ak sú a, b, c navzájom rôzne reálne čísla? Nájdite všetky možnosti.

2. Určte všetky trojice zložených prirodzených čísel, z ktorých každé je deliteľné súčinom superdeliteľov zvyšných dvoch čísel. (Superdeliteľom čísla $n > 1$ je jeho najväčší deliteľ d s vlastnosťou $d < n$.)
3. V ostrouhlom trojuholníku ABC sú D a E vnútorné body strany BC , pritom D leží medzi B a E , $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Predpokladajme, že os uhla DAE má s osou úsečky BC jediný spoločný bod, ktorý označíme F . Dokážte rovnosť $|\angle BAC| + |\angle DFE| = 180^\circ$.
4. Okolo kruhu je usporiadaných 70 zhasnutých žiaroviek. Pre ľubovoľnú skupinu žiaroviek sme schopní pripraviť prepínač, ktorý zmení stav každej žiarovky z tejto skupiny (zhasne rozsvietené a rozsvieti zhasnuté) a ostatné žiarovky neovplyvní. Aký je najmenší počet prepínačov, pomocou ktorých je možné rozsvietiť ľubovoľnú štvoricu susedných žiaroviek (pričom ostatné budú zhasnuté)?

Krajské kolo kategórie A sa koná

v utorok 12. januára 2021

tak, aby začalo o 08:30 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách www.olympiady.sk a skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajčí, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020