

## 70. ročník Matematickej olympiády, 2020/2021

### Úlohy krajského kola kategórie B

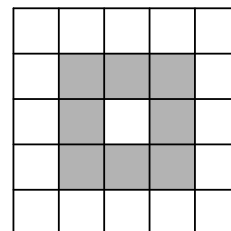
1. a) Dokážte nerovnosť  $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$  pre všetky dvojice kladných reálnych čísel  $a, b$ .  
b) Nájdite najmenšie reálne číslo  $k$  také, aby nerovnosť  $k(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 + ab$  platila pre všetky dvojice kladných reálnych čísel  $a, b$ .

2. Pre každé kladné celé číslo  $k$  označme  $d_k$  počet jednociferných deliteľov čísla  $k$ . Dokážte, že pre každé kladné celé číslo  $n$  platí

$$\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} < 3.$$

3. Daný je pravouhlý trojuholník  $ABC$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$ . Nech  $D$  je ľubovoľný vnútorný bod odvesny  $AC$  a  $p$  kolmica z bodu  $D$  na preponu  $AB$ . Označme  $E \neq D$  bod priamky  $p$  taký, že body  $A, B, D, E$  ležia na kružnici. Označme ešte  $F$  priesečník priamok  $p$  a  $BC$ . Dokážte, že  $|AE| = |AF|$ .

4. Na hracom pláne s rozmermi  $9 \times 9$  štvorcíkov je umiestnená loď tvorená ôsmimi štvorcíkmi po obvode štvorca  $3 \times 3$  (na obrázku je vyznačená sivou farbou).



- a) Na koľko štvorcíkov musíme vystreliť, aby sme mali istotu, že loď zasiahneme aspoň na dvoch rôznych miestach? O prvom zásahu sa pritom nedozvieme.  
b) Stačí rovnaký počet výstrelů aj pre hrací plán s veľkosťou  $11 \times 9$ ?

Krajské kolo kategórie B sa koná

**v utorok 30. marca 2021**

tak, aby začalo o 08:30 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 19:00 dostupné na internetových adresách [www.olympiady.sk](http://www.olympiady.sk) a [skmo.sk](http://skmo.sk).

---

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajčí, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Tomáš Jurík

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021