

70. ročník Matematickej olympiády, 2020/2021

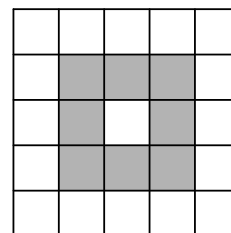
Úlohy krajského kola kategórie B (maďarská verzia)

1. a) Bizonyítsuk be, hogy a $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ egyenlőtlenség fennáll minden pozitív valós a, b számpárra!
b) Keresük meg azt a legkisebb k valós számot, amelyre a $k(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 + ab$ egyenlőtlenség minden pozitív valós a, b számpárra fennáll!
2. Minden pozitív egész k számra jelölje d_k a k szám egyjegyű osztóinak számát. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számra fennáll:

$$\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} < 3.$$

3. Adott a derékszögű ABC háromszög, melynek derékszöge a C csúcsnál van. Legyen D az AC befogó egy tetszőleges belső pontja, s a D -ből az AB átfogóra húzott merőlegest jelölje p . Jelölje $E \neq D$ a p azon pontját, amelyre az A, B, D, E pontok egy körvonalra illeszkednek. Jelölje továbbá F a p és BC egyenesek metszéspontját! Bizonyítsuk be, hogy $|AE| = |AF|$.

4. Egy 9×9 -es négyzethálón el van helyezve egy hajó, amely egy 3×3 -as négyzet területét alkotó nyolc mezőből áll (az ábrán szürke színnel van feltüntetve).



- a) Legalább hány mezőre kell rálőnünk, hogy a hajót biztosan eltaláljuk legalább két különböző helyen? Az első találatról nem szerzünk tudomást.
- b) Elegendő-e ugyanannyi kísérlet, ha a négyzetháló mérete 11×9 ?

A B kategória kerületi fordulójára

2021. március 30-án (kedden)

délelőtt kell sort keríteni úgy, hogy pontosan 8.30-kor kezdődjön és a versenyzőknek a feladatok megoldására 4 óra álljon a rendelkezésükre. A versenyző mindegyik feladatért 6 pontot szerezhet. Sikeres megoldónak nyilvánul az a versenyző, aki 10 vagy több pontot szerez. A verseny folyamán tilos a számológépek és egyéb más elektronikus segédeszközök, valamint bármilyen írásos jegyzetek használata. Ezeket a feltételeket a verseny kezdete előtt kell a versenyzők tudomására hozni.

A feladatok megoldásai a verseny napján 19 órától megtekinthetők lesznek a következő weboldalakon: www.olympiady.sk és skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajčí, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Peter Novotný, Tomáš Jurík

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021