**70. ročník Matematickej olympiády**
**2020/2021** *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

**1.** *Určte všetky prirodzené čísla $n$, pre ktoré platí*

$$n + p(n) = 70,$$

*pričom $p(n)$ označuje súčin všetkých cifier čísla $n$.* (Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Najskôr si uvedomíme, že každé hľadané číslo $n$ musí byť dvojciferné. Naozaj, pre jednociferné číslo $n$ platí $n+p(n) = 2n \leqq 18$ a zároveň zo zadanej rovnice $n+p(n) = 70$ zrejme vyplýva dokonca $n \leqq 70$.

Dosaďme teraz dvojciferné $n = \overline{ab}$ s prvou cifrou $a \leqq 7$ do rovnice a rovno ju upravme na súčinový tvar

$$n + p(n) = (10a + b) + ab = 70, \quad \text{po úprave} \quad (a + 1)(b + 10) = 80.$$

Keďže $2 \leqq a + 1 \leqq 8$ a súčasne $10 \leqq b + 10 \leqq 19$, možno číslo $80 = 2^4 \cdot 5$ rozložiť na súčin dvoch činiteľov $a+1$, $b+10$ iba dvoma spôsobmi, a to ako $5 \cdot 16$ alebo $8 \cdot 10$ (podľa toho, v ktorom činiteli je zastúpený prvočiniteľ 5). V prvom prípade je $a = 4$ a $b = 6$, v druhom $a = 7$ a $b = 0$.

*Záver.* Jediné dve vyhovujúce čísla sú $n = 46$ a $n = 70$.

*Poznámka.* Rovnicu $(10a+b)+ab = 70$ možno riešiť tiež tak, že jednu z neznámych $a$, $b$ vyjadríme lomeným výrazom pomocou druhej a potom urobíme prislúchajúce delenie dvojčlenov (so zvyškom), napríklad

$$b = \frac{70 - 10a}{a + 1} = -10 + \frac{80}{a + 1}.$$

Teraz už stačí iba zistiť, pre ktoré $a \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ platí $(a + 1) \mid 80$ a súčasne zodpovedajúce $b$ leží v $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Dodajme, že rovnicu $(10a+b)+ab = 70$ s neznámymi ciframi $a$, $b$ možno riešiť ešte kratším postupom. Upravíme ju na tvar $b(a + 1) = 10(7 - a)$, podľa ktorého je aspoň jedno z čísel $b$, $a + 1$ deliteľné piatimi. Musí teda nastať niektorý z prípadov $b = 0$, $b = 5$, $a = 4$ či $a = 9$. Zvyšok riešenia je už jednoduchý.

**Iné riešenie.** Ak je $n \leqq 39$, tak $n + p(n) \leqq 39 + 3 \cdot 9 = 66$, takže pre každé hľadané $n$ musí platiť $n \geqq 40$. Na druhej strane, z rovnice $n + p(n) = 70$ vyplýva $n \leqq 70$, pritom hodnota $n = 70$ zrejme vyhovuje. Ostáva tak posúdiť dvojciferné čísla $n$ s desiatkovou cifrou 4, 5 a 6. Ich jednotkovú cifru označme $b$ ako predtým.

- $40 \leqq n \leqq 49$: Má platiť $(40 + b) + 4b = 70$, čiže $5b = 30$, odkiaľ $b = 6$.
- $50 \leqq n \leqq 59$: Má platiť $(50 + b) + 5b = 70$, čiže $6b = 20$, avšak 6 nedelí 20.
- $60 \leqq n \leqq 69$: Má platiť $(60 + b) + 6b = 70$, čiže $7b = 10$, avšak 7 nedelí 10.

Došli sme k tomu istému záveru ako v prvom riešení: vyhovujú iba čísla 46 a 70.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 1 bod za prevod zadanej rovnice na rovnicu pre dve neznáme cifry čísla $n$ (pritom konštatovanie, že $n$ je dvojciferné, možno považovať za zrejmé, t. j. môže byť uvedené bez zdôvodnenia); 4 body za úplné vyriešenie tejto rovnice (pritom za drobné chyby či neúplnosť strhnite 1–2 body); 1 bod za uvedenie záverečnej odpovede.

K hodnoteniu riešení podobných tomu z druhého riešenia, keď sa riešiteľ rozhodne pre postupné testovanie dvojciferných čísel (po desiatkach alebo dokonca jednotlivo): Ak také testovanie, ktoré musí byť podľa pravidiel MO písomne doložené, nie je úplné či obsahuje numerické chyby, dajte nanajvýš 5 bodov.

Za nájdenie *oboch* hľadaných čísel $n$ bez zdôvodnenia, prečo iné neexistujú, dajte 1 bod. Tento bod možno pripočítať iba k 1 bodu za prevod zadanej rovnice na rovnicu pre dve neznáme cifry.

**2.** *Určte, pre ktoré prirodzené čísla $n$ možno štvorcovú tabuľku $n \times n$, ktorej políčka sú ofarbené ako políčka šachovnice, vyplniť číslami $2$ a $-1$ tak, že súčasne platí:*

*(i) súčet všetkých čísel v každom riadku aj v každom stĺpci tabuľky je rovný 0,*

*(ii) súčet čísel na všetkých čiernych políčkach tabuľky sa rovná súčtu čísel na všetkých jej bielych políčkach.*

(*Martin Melicher*)

**Riešenie.** V prvej časti riešenia dokážeme, že každé vyhovujúce číslo $n$ musí byť deliteľné šiestimi. Trikrát pritom využijeme zrejmý poznatok z riešenia 2. úlohy domáceho kola: *Ak je súčet niekoľkých čísel rovný nule a pritom každé z nich je rovné* $2$ *či* $-1$, *je celkový počet týchto čísel deliteľný tromi.*

Predpokladajme teraz, že tabuľka $n \times n$ je vyplnená požadovaným spôsobom. Vďaka úvodnému poznatku je podľa podmienky (i) číslo $n$ (rovné počtu čísel v jednom riadku tabuľky) deliteľné tromi. Že je číslo $n$ deliteľné tiež dvoma, dokážeme úvahou o súčtoch $S_b$ a $S_c$ čísel na všetkých bielych, resp. všetkých čiernych políčkach tabuľky.

Súčet $S_b + S_c$ všetkých čísel z tabuľky dostaneme, keď sčítame všetkých $n$ súčtov čísel v jednotlivých riadkoch. Tie sú podľa podmienky (i) všetky rovné nule, a preto platí $S_b + S_c = 0$. Podľa podmienky (ii) však zároveň platí $S_b = S_c$, čo dokopy dáva, že obe čísla $S_b$ a $S_c$ sú rovné nule. To podľa úvodného poznatku znamená, že číslo 3 je deliteľom ako počtu všetkých bielych políčok, tak počtu všetkých čiernych políčok. Tieto dva počty sú však buď rovnaké (ak je $n$ párne), alebo sa líšia o 1 (ak je $n$ nepárne). Keďže sa však dva násobky čísla 3 nemôžu líšiť o 1, prichádzame k záveru, že počty bielych a čiernych políčok sú rovnaké, takže číslo $n$ je skutočne párne, ako sme sľúbili ukázať. Prvá časť riešenia je hotová: číslo $n$ je deliteľné dvoma aj tromi, a teda aj šiestimi.

V druhej časti riešenia ukážeme, že pre každé číslo $n$, ktoré je deliteľné šiestimi, možno tabuľku $n \times n$ vyplniť požadovaným spôsobom.

Pre číslo $n = 6k$, pričom $k$ je ľubovoľné prirodzené číslo, rozdeľme tabuľku $6k \times 6k$ disjunktným spôsobom na $k^2$ menších tabuliek $6 \times 6$. Určite stačí ukázať, že každú z týchto tabuliek $6 \times 6$ možno vyplniť číslami $2$ a $-1$ požadovaným spôsobom, vo výsledku totiž vždy dostaneme vyhovujúce vyplnenie celej tabuľky $6k \times 6k$. Príklad jedného z možných vyplnení tabuľky $6 \times 6$ vidíte na obr. 1 (nezáleží zrejme na tom, ktoré políčka sú ofarbené čierno, a ktoré bielo).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ |
| $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ |
| $2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ |
| $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $2$ | $-1$ | $-1$ | $2$ |

Obr. 1

*Poznámka.* V prvej časti nášho riešenia sme využili iba tú časť podmienky (i), ktorá sa týka nulovosti súčtu všetkých čísel v každom riadku.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 1 bod za konštatovanie, že číslo $n$ je deliteľné tromi (možno sa pritom odvolať na výsledok z domáceho kola); 1 bod za zdôvodnenie, prečo sú súčty čísel na všetkých čiernych aj na všetkých bielych políčkach oba rovné nule; 2 body za dôkaz, že $n$ je párne číslo; 2 body za konštrukciu príkladu vyplnenia pre každé $n = 6k$ (z toho 1 bod za príklad pre $n = 6$).

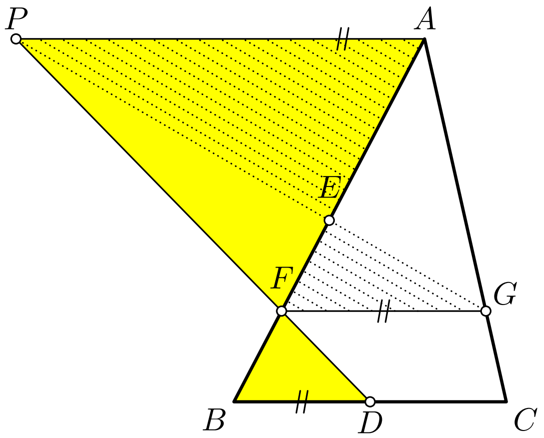
---

**3.** *Daný je trojuholník $ABC$, v ktorom $D$, $E$ sú postupne stredy strán $BC$, $AB$. Nech $F$ je stred úsečky $BE$ a $G$ vnútorný bod strany $AC$, pre ktorý platí $|AG| = 3|CG|$. Dokážte, že priesečník priamok $DF$ a $GE$ leží na tej rovnobežke s priamkou $BC$, ktorá prechádza bodom $A$.* (*Patrik Bak*)

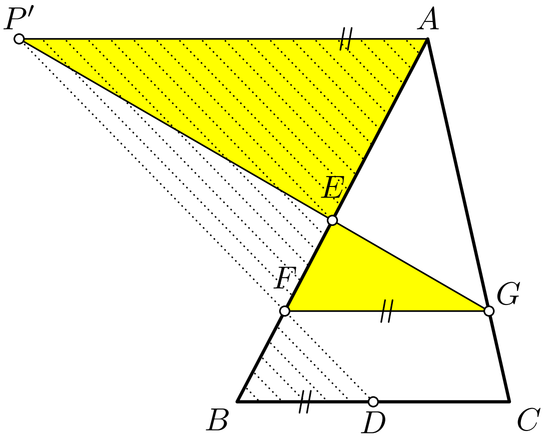
**Riešenie.** Venujme sa najskôr dvojici úsečiek $BC$ a $FG$. Zo zadania bodov $F$ a $G$ vyplýva $|AB| : |AF| = |AC| : |AG| = 4 : 3$, takže trojuholníky $ABC$ a $AFG$ sú podľa vety *sus* podobné v pomere $4 : 3$. Z toho vyplýva, že aj $|BC| : |FG| = 4 : 3$ a že $BC \parallel FG$ (vďaka zhodným súhlasným uhlom, ktoré v ďalších podobných situáciách už spomínať nebudeme). Z praktických dôvodov ďalej zvolíme jednotku dĺžky tak, aby platilo $|BC| = 4$ a $|FG| = 3$.

Označme teraz $P$ priesečník priamky $DF$ a rovnobežky zo zadania úlohy. Z obr. 2 je zrejmé, že trojuholníky $BDF$ a $APF$ sú podľa vety *uu* podobné. Ich pomer podobnosti je $1 : 3$, lebo podľa zadania platí $|AF| = 3|BF|$. Z podobnosti trojuholníkov $BDF$ a $APF$ vzhľadom na $|BD| = 2$ teda vyplýva $|AP| = 3|BD| = 3 \cdot 2 = 6$.

Označme ďalej $P'$ priesečník priamky $GE$ a rovnobežky zo zadania úlohy. Podľa obr. 3 vidíme, že aj trojuholníky $FGE$ a $AP'E$ sú podľa vety *uu* podobné; ich pomer podobnosti je pritom $|FE| : |AE| = 1 : 2$, teda $|AP'| = 2 \cdot |FG| = 2 \cdot 3 = 6$.



Obr. 2



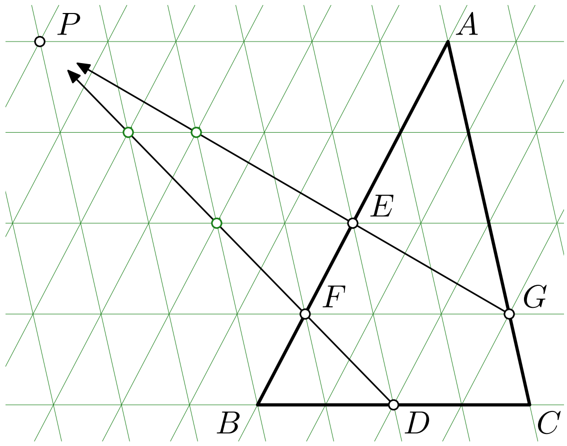
Obr. 3

Zistili sme, že pre body $P$ a $P'$, ktoré ležia na uvažovanej rovnobežke v jednej polrovine vyťatej priamkou $AB$, platí $|AP| = |AP'|$, a preto nutne $P = P'$. Na danej rovnobežke teda leží aj priesečník priamok $DF$ a $GE$, ako sme mali dokázať.

*Poznámka 1.* Namiesto úvahy o druhom priesečníku $P'$ je možné dokázať, že priesečník $P$ leží na polpriamke opačnej k polpriamke $EG$. Na to stačí overiť rovnosť $|\angle FEG| = |\angle AEP|$. Tá ale vyplýva z vyšrafovaných trojuholníkov $FEG$ a $AEP$, ktoré sú totiž podobné podľa vety *sus*, lebo sa zhodujú v uhloch pri vrcholoch $F$, $A$ a oba pomery $|FE| : |AE|$, $|FG| : |AP|$ sú rovné pomeru $1 : 2$.

Postupovať pri riešení možno tiež tak, že uvážime iba priesečník $P'$, z podobných trojuholníkov $FEG$, $AEP'$ odvodíme rovnosť $|AP'| = 6$ a dokážeme rovnosť $|\measuredangle BFD| = |\measuredangle AFP'|$ z vyšrafovaných trojuholníkov $BFD$ a $AFP'$, ktoré sú totiž podľa vety *sus* podobné, lebo sa zhodujú v uhloch pri vrcholoch $B$, $A$ a oba pomery $|BF| : |AF|$, $|BD| : |AP'|$ sú rovné pomeru $1 : 3$.

*Poznámka 2.* Polohu priesečníka priamok $DF$ a $GE$ nám prezradí, keď si vopred načrtneme rovinnú trojuholníkovú mriežku, ktorej uzly delia každú stranu trojuholníka $ABC$ na štyri zhodné úseky.




Obr. 4

Obr. 4 síce priamo napovedá, že priamky $DF$ a $GE$ prechádzajú obe tým uzlom, ktorý je „šiesty naľavo“ od uzla $A$, samotný náčrt však sa nedá považovať za úplné riešenie úlohy. Je nutné dokázať to, čo na obrázku vidíme. Presnejšie povedané, je nutné zdôvodniť, že uvažované spojnice deliacich bodov na stranách trojuholníka $ABC$ ho rozdeľujú na 16 menších, navzájom zhodných trojuholníkov,[1] ktoré už potom možno doplniť do výslednej mriežky, ktorá bude „zjemnením“ mriežky tvorenej kópiami trojuholníka $ABC$.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 2 body za zavedenie aspoň jedného z priesečníkov $P$ a $P'$. Zvyšné 4 body dajte podľa úplnosti úvah o dvojiciach podobných trojuholníkov, ktoré sú pri zvolenom postupe potrebné, z toho 1 bod za dôkaz oboch relácií $|BC| : |FG| = 4 : 3$ a $BC \parallel FG$. Tento bod možno udeliť aj v prípade, keď žiadny z bodov $P$, $P'$ zavedený nie je.

Za náčrt trojuholníkovej mriežky s vykreslenými polpriamkami $DF$ a $GE$ (ako je uvedený v poznámke 2) dajte 4 body, k tomu možno pripočítať 1–2 body podľa miery úplnosti, s akou je existencia takej mriežky zdôvodnená.

---

**4.** *Nech $a$, $b$ sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = 1$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu*

$$\frac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} + \frac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}$$

*a určte, pre ktoré uvažované dvojice $a$, $b$ je táto hodnota dosiahnutá.* (Tomáš Bárta)

[1] Prvým krokom takého zdôvodnenia môže byť úvaha o dvojici úsečiek $BC$ a $FG$ z úvodného odseku riešenia.

**Riešenie.** Použitím podmienky $a^2+b^2=1$ upravíme najskôr prvý zlomok zo zadaného výrazu:

$$\frac{a^2(a+b^3)}{b-b^3}=\frac{a^2(a+b^3)}{b(1-b^2)}=\frac{a^2(a+b^3)}{b\cdot a^2}=\frac{a+b^3}{b}=\frac{a}{b}+b^2.$$

Podobne pre druhý zlomok platí

$$\frac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}=\frac{b}{a}+a^2.$$

Sčítaním vyjadrení oboch zlomkov tak pre zadaný výraz $V$ dostaneme:

$$V=\left(\frac{a}{b}+b^2\right)+\left(\frac{b}{a}+a^2\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+(a^2+b^2)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1,$$

pričom sme opäť využili podmienku $a^2+b^2=1$.

Všimnime si, že pre súčet zlomkov v posledných okrúhlych zátvorkách platí[2]

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{\left(a-b\right)^2+2ab}{ab}=\frac{\left(a-b\right)^2}{ab}+2\geqq 2,\quad \text{lebo}\quad \frac{\left(a-b\right)^2}{ab}\geqq 0.$$

Z odvodeného vyjadrenia výrazu $V$ teda vyplýva dolný odhad $V\geqq 2+1=3$. Keďže navyše v použitej nerovnosti $a/b+b/a\geqq 2$ nastane rovnosť práve vtedy, keď platí $a=b$, rovnosť $V=3$ nastane práve vtedy, keď kladné čísla $a$, $b$ spĺňajú obe podmienky $a^2+b^2=1$ a $a=b$, t.j. práve vtedy, keď $a=b=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Číslo 3 je teda hľadaná najmenšia hodnota daného výrazu $V$ a je dosiahnutá pre jedinú dvojicu uvažovaných čísel $a$, $b$ (určených v závere predchádzajúcej vety).

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 2 body za potrebnú úpravu aspoň jedného z dvoch zadaných zlomkov; 1 bod za úpravu ich súčtu na tvar vhodný pre minimalizáciu súčtu $a/b+b/a$ či maximalizáciu súčinu $ab$; 2 body za zdôvodnenie dolného odhadu číslom 3 (možno sa pritom odvolať na AG-nerovnosť ako v poznámke pod čiarou); 1 bod za určenie (nie iba uhádnutie), kedy je najmenšia hodnota dosiahnutá.

Pri neúplnom riešení za uhádnutie hľadaného minima 3 dajte 1 bod iba v prípade, keď je pre túto hodnotu uvedená zodpovedajúca dvojica $a=b=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tento bod možno pripočítať k prvým 2 alebo 3 bodom udeleným podľa pokynov z predchádzajúceho odseku. Bez úplného dôkazu nerovnosti $V\geqq 3$ aj pri iných postupoch možno získať nanajvýš 4 body.

*Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.*

[2] Na dôkaz tohto výsledku možno tiež využiť AG-nerovnosť $\frac{1}{2}(u+v)\geqq\sqrt{uv}$ pre hodnoty $u=a/b$ a $v=b/a$. Tiež je možné vďaka podmienke $a^2+b^2=1$ využiť rovnosť $a/b+b/a=1/(ab)$ a potom maximalizovať súčin $ab$, napríklad použitím uvedenej AG-nerovnosti pre $u=a^2$ a $v=b^2$.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

| | |
|---|---|
| Autori: | Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf |
| Recenzenti: | Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Peter Novotný, Tomáš Jurík |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021 |