

## 70. ročník Matematickej olympiády, 2020/2021

### Úlohy krajského kola kategórie C

1. Určte všetky prirodzené čísla  $n$ , pre ktoré platí

$$n + p(n) = 70,$$

pričom  $p(n)$  označuje *súčin* všetkých cifier čísla  $n$ .

2. Určte, pre ktoré prirodzené čísla  $n$  možno štvorcovú tabuľku  $n \times n$ , ktorej políčka sú ofarbené ako políčka šachovnice, vyplniť číslami 2 a  $-1$  tak, že súčasne platí:

- (i) súčet všetkých čísel v každom riadku aj v každom stĺpci tabuľky je rovný 0,  
(ii) súčet čísel na všetkých čiernych políčkach tabuľky sa rovná súčtu čísel na všetkých jej bielych políčkach.

3. Daný je trojuholník  $ABC$ , v ktorom  $D$ ,  $E$  sú postupne stredy strán  $BC$ ,  $AB$ . Nech  $F$  je stred úsečky  $BE$  a  $G$  vnútorný bod strany  $AC$ , pre ktorý platí  $|AG| = 3|CG|$ . Dokážte, že priesečník priamok  $DF$  a  $GE$  leží na tej rovnobežke s priamkou  $BC$ , ktorá prechádza bodom  $A$ .

4. Nech  $a$ ,  $b$  sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pre ktoré platí  $a^2 + b^2 = 1$ . Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a^2(a + b^3)}{b - b^3} + \frac{b^2(b + a^3)}{a - a^3}$$

a určte, pre ktoré uvažované dvojice  $a$ ,  $b$  je táto hodnota dosiahnutá.

Krajské kolo kategórie C sa koná

**v utorok 30. marca 2021**

tak, aby začalo o 08:30 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 19:00 dostupné na internetových adresách [www.olympiady.sk](http://www.olympiady.sk) a [skmo.sk](http://skmo.sk).

---

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajčí, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Tomáš Jurík

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021