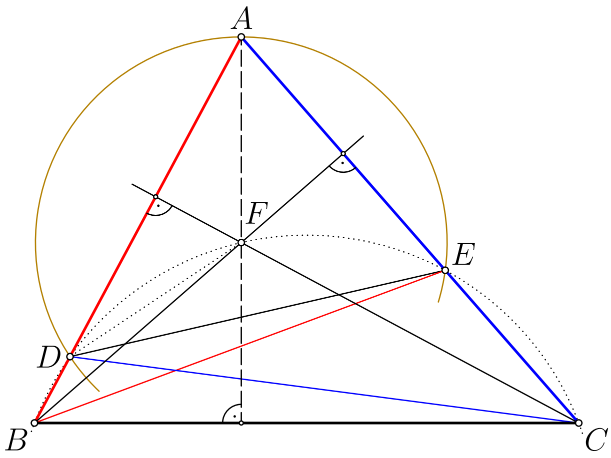
70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

---

1. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Vnútri jeho strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F stred kružnice opísanej trojuholníku ADE. Dokážte, že $AF \perp BC$.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Riešenie. Bod F ako stred kružnice opísanej trojuholníku ADE leží na osiach jeho strán AD a AE. Os úsečky AD vďaka rovnosti $|CA| = |CD|$ prechádza bodom C a je pritom kolmá na priamku AB, takže je to priamka, na ktorej leží výška trojuholníka ABC z vrcholu C (obr. 1). Podobne z rovnosti $|BE| = |BA|$ vyplýva, že na osi úsečky AE leží výška trojuholníka ABC z vrcholu B. Spolu to znamená, že spoločný bod F oboch osí je priesečníkom dvoch výšok trojuholníka ABC, a preto ním prechádza aj jeho tretia výška z vrcholu A. Platí teda $AF \perp BC$, ako sme mali dokázať.



Obr. 1

Iné riešenie. Úlohu vyriešime, keď pri zvyčajnom označení $\beta = |\measuredangle ABC|$ dokážeme, že uhol DAF má veľkosť $90° - \beta$. To vďaka rovnoramennému trojuholníku ADF nastane práve vtedy, keď stredový uhol AFD bude mať veľkosť 2β, čiže práve vtedy, keď obvodový uhol AED bude mať veľkosť β. Posledné je však ekvivalentné s tým, že štvoruholník $BCED$ je tetivový. Overiť túto vlastnosť je už jednoduché: Z rovnoramenných trojuholníkov AEB a ADC vidíme, že veľkosť $\alpha = |\measuredangle BAC|$ majú aj uhly AEB a ADC, takže úsečku BC je z bodov D a E vidno pod tým istým uhlom $180° - \alpha$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 2 body za dôkaz $BF \perp AC$, 2 body za dôkaz $CF \perp AB$ (jeden z dôkazov možno prehlásiť za analógiu druhého) a 2 body za záver o tretej výške trojuholníka. Len za hypotézu, že bod F je priesečník výšok trojuholníka ABC, dajte 2 body.

Pri postupe, ktorý nepracuje s výškami trojuholníka ABC, dajte 2 body za dôkaz, že $BCED$ je tetivový štvoruholník.

---

2. *Na tabuli je napísaných niekoľko (nie nutne rôznych) prvočísel tak, že ich súčin je 2020-krát väčší ako ich súčet. Určte ich najmenší možný počet.* (Patrik Bak)

Riešenie. Prvočísla na tabuli označíme $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Podľa zadania platí

$$2020 \cdot (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = p_1 p_2 \ldots p_n. \qquad (1)$$

Ľavá strana rovnosti (1) je deliteľná číslom $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$. V prvočíselnom rozklade na pravej strane (1) preto nutne vystupujú prvočísla 2, 2, 5, 101. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 101$. Keby na tabuli boli iba tieto 4 prvočísla (prípad $n = 4$), tak by rovnosť (1) zrejme neplatila ($2020 \cdot 110 \neq \neq 2020$). Nutne teda musí platiť $n \geqq 5$.

Dosadením už známych prvočísel $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 101$ do rovnice (1) dostaneme po jej vydelení číslom 2020 rovnicu

$$110 + p_5 + p_6 + \ldots + p_n = p_5 \cdot p_6 \cdot \ldots \cdot p_n. \tag{2}$$

Keďže hľadáme najmenšie možné $n \geqq 5$, pri ktorom prvočísla $p_5, p_6, \ldots, p_n$ spĺňajúce rovnicu (2) existujú, rozoberieme ďalej postupne najmenšie do úvahy prichádzajúce hodnoty $n = 5, 6, \ldots$, kým prvé vyhovujúce n nenájdeme.

- ▷ *Prípad* $n = 5$. Rovnica (2) je tvaru $110 + p_5 = p_5$, takže ju nespĺňa žiadne prvočíslo p_5.
- ▷ *Prípad* $n = 6$. Príslušnú rovnicu

$$p_5 p_6 = p_5 + p_6 + 110 \tag{3}$$

upravíme na súčinový tvar

$$(p_5 - 1)(p_6 - 1) = 111.$$

Oba činitele na ľavej strane sú tak nutne čísla nepárne, takže čísla p_5 a p_6 sú obe párne.[1] Jediné párne prvočísla $p_5 = p_6 = 2$ však rovnici (3) nevyhovujú.

- ▷ *Prípad* $n = 7$. Rovnica (2) má tvar

$$p_5 p_6 p_7 = p_5 + p_6 + p_7 + 110. \tag{4}$$

Zdôraznime, že našou úlohou je iba posúdiť, či niektorá trojica prvočísel rovnici (4) vyhovuje. Uhádnuť trojicu $p_5 = p_6 = p_7 = 5$ nie je ťažké:

$$5^3 = 125 = 5 + 5 + 5 + 110.$$

Tým je celé riešenie úlohy ukončené. Dodajme ešte, že ďalšie trojice prvočísel vyhovujúce rovnici (4) sú $(2, 5, 13)$ a $(2, 3, 23)$.[2] Preto v prípade, že trojicu $(5, 5, 5)$ neuhádneme, možno riešenie dokončiť tak, že do rovnice (4) skusmo dosadíme najmenšie existujúce prvočíslo $p_5 = 2$. Pre prvočísla p_6 a p_7 tak dostaneme rovnicu, pri ktorej po prevode na súčinový tvar $(2p_6 - 1)(2p_7 - 1) = 225$ určíme dokonca dve prvočíselné riešenia $(3, 23)$ a $(5, 13)$.

Zhrňme výsledok našich úvah: Na tabuli bolo napísaných aspoň 7 prvočísel, príkladom možnej sedmice (usporiadanej vzostupne) je $2, 2, 5, 5, 5, 5, 101$.

Záver. Najmenší možný počet prvočísel na tabuli je rovný 7.

[1] Tento záver pritom vyplýva aj priamo z rovnice (3), podľa ktorej celé čísla $p_5 p_6$ a $p_5 + p_6$ majú rovnakú paritu. Nastane to jedine vtedy, keď sa jedná o súčin a súčet dvoch párnych čísel.

[2] Iné vyhovujúce trojice neexistujú, pozri poznámky nižšie.

Poznámky. Naznačme pre zaujímavosť, ako vyriešiť rovnicu (4) úplne. Prvý krok sme už v texte učinili popisom, ako vyriešiť prípad, keď jedno z troch neznámych prvočísel je 2. Podobne možno vyriešiť prípad, keď jedno z prvočísel je 3, v ktorom však dostaneme už iba skôr objevené riešenie $(2, 3, 23)$ s prvočíslom 2.

Ostáva posúdiť prípad, keď všetky tri prvočísla p_5, p_6 a p_7 sú aspoň 5. Pri vhodnom označení, keď p_7 je najväčšie z nich, platí

$$5 \cdot 5 \cdot p_7 \leqq p_5 p_6 p_7 = p_5 + p_6 + p_7 + 110 \leqq 3p_7 + 110,$$

odkiaľ vyplýva $p_7 \leqq 5$. Nutne tak platí $p_5 = p_6 = p_7 = 5$, čo je posledné hľadané riešenie.

Dá sa dokázať, že počet siedmich prvočísel na tabuli je jediný možný.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 1 bod za zdôvodnenie, že na tabuli je nutne štvorica prvočísel $(2, 2, 5, 101)$; 1 bod za zdôvodnenie, že ich nemôže byť celkom 5; 2 body za zdôvodnenie, že ich nemôže byť celkom 6; posledné 2 body za uvedenie príkladu, že ich môže byť celkom 7. V závere riešenia ale nie je nutné vypisovať prvú určenú štvoricu spolu s druhou akokoľvek získanou trojicou, lebo zadanie úlohy to nevyžaduje.

---

3. *Ak sú a, b, c navzájom rôzne nezáporné reálne čísla, aký je najmenší možný počet rôznych čísel medzi číslami $a + b$, $b + c$, $c + a$, $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$?* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Úloha je v premenných a, b, c symetrická: zmenou ich poradia dôjde iba ku zmene poradia skúmaných šiestich čísel. V prvej časti riešenia preto budeme predpokladať, že platí $a < b < c$. Vďaka nezápornosti čísel a, b, c potom platí tiež $a^2 < b^2 < c^2$.

Z vypísaných nerovností ľahko vyplýva, že prvá trojica čísel $a + b$, $b + c$, $c + a$ a druhá trojica čísel $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$ sú usporiadané nasledovne:

$$a + b < a + c < b + c \qquad \text{a} \qquad a^2 + b^2 < a^2 + c^2 < b^2 + c^2. \tag{1}$$

Vidíme, že medzi skúmanými šiestimi číslami sú vždy aspoň tri rôzne. Ukážeme teraz, že len tri rôzne čísla to byť nemôžu. Inak by totiž podľa (1) museli platiť rovnosti

$$\begin{aligned} a + b &= a^2 + b^2, \\ a + c &= a^2 + c^2, \\ b + c &= b^2 + c^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Odčítaním prvej rovnosti od druhej, resp. od tretej rovnosti by sme dostali

$$\begin{aligned} c - b &= (c - b)(c + b), \\ c - a &= (c - a)(c + a). \end{aligned}$$

Z toho po vydelení kladnými číslami $c - b$, resp. $c - a$ vyplýva, že obe čísla $c + b$ a $c + a$ by sa rovnali 1, čo odporuje nerovnostiam (1). Dokázali sme tak, že medzi skúmanými šiestimi číslami sú vždy aspoň štyri rôzne.

V druhej časti riešenia nájdeme trojicu rôznych nezáporných čísel a, b, c tak, aby medzi skúmanými šiestimi číslami boli iba štyri rôzne.

Podľa postupu z prvej časti sa vyplatí voľbu čísel a, b, c začať tak, aby bola splnená napríklad rovnosť $b + c = b^2 + c^2$. Jednoduchý spôsob, ako to dosiahnuť, je položiť $b = 1$ a $c = 0$. Potom bude šestica čísel v poradí zo zadania úlohy vyzerať takto:

$$a + 1, \ 1, \ a, \ a^2 + 1, \ 1, \ a^2.$$

Za nezáporné číslo a už ale nemôžeme voliť ani 0, ani 1. Nehodí sa ani žiadne a medzi 0 a 1, lebo pre ne je v šestici päť rôznych čísel $a^2 < a < 1 < a^2 + 1 < a + 1$.

Musíme teda voliť $a > 1$. Vtedy bude platiť

$$1 < a < a^2 < a^2 + 1 \qquad \text{a zároveň} \qquad a < a + 1 < a^2 + 1.$$

Vidíme, že v našej šestici budú iba štyri rôzne čísla práve vtedy, keď číslo $a > 1$ bude spĺňať podmienku $a^2 = a + 1$. Jednoduchým výpočtom zistíme, že sa jedná o číslo

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

známe pod názvom *zlatý rez* nielen v matematike, ale aj v umení.

Záver. Najmenší možný počet rôznych čísel v zadanej šestici je rovný 4.

Iné riešenie. Opíšme jeden z ďalších spôsobov hľadania trojíc (a, b, c), pre ktoré sú v zadanej šestici iba štyri rôzne čísla. Taká situácia určite nastane, ak budú splnené dve z troch rovníc sústavy (2). Vyberme si rovnice

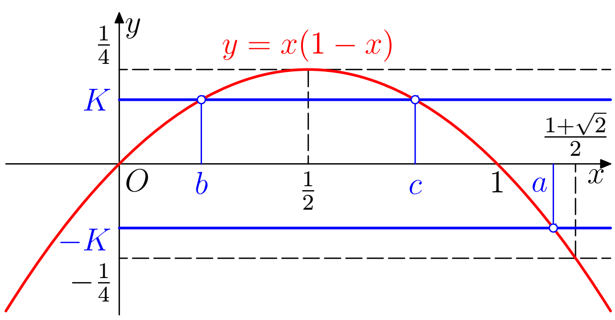
$$a + b = a^2 + b^2 \qquad \text{a} \qquad a + c = a^2 + c^2$$

a vzhľadom na symetriu predpokladajme, že $b < c$. Ak odčítame tieto dve rovnice od seba, zistíme, že musí platiť $b + c = 1$ (pozri text prvého riešenia). Z toho vzhľadom na $b < c$ máme $b = \frac{1}{2} - t$ a $c = \frac{1}{2} + t$, pričom $t \in (0, \frac{1}{2}\rangle$. Pri takej voľbe čísel b a c ďalej stačí uvažovať iba prvú rovnicu $a + b = a^2 + b^2$, z ktorej po dosadení $b = \frac{1}{2} - t$ vyjadríme kladné číslo a pomocou parametra t. Zapíšme ho kvôli prehľadnosti rovno na jeden riadok spolu s vyjadreniami čísel b a c:

$$a = \frac{1 + \sqrt{2 - 4t^2}}{2}, \quad b = \frac{1}{2} - t, \quad c = \frac{1}{2} + t.$$

Z možných hodnôt $t \in (0, \frac{1}{2}\rangle$ sa nehodí iba $t = \frac{1}{2}$, keď vyjde $a = c = 1$. Každá hodnota $t \in (0, \frac{1}{2})$ totiž určuje trojicu rôznych kladných čísel a, b a c, lebo pre ne zrejme platí $0 < b < c < 1 < a$.

Dodajme, že existenciu nájdenej nekonečnej množiny trojíc (a, b, c) možno potvrdiť aj bez výpočtov. Stačí len dotyčnú dvojicu rovníc $a + b = a^2 + b^2$ a $a + c = a^2 + c^2$ upraviť na tvar $a(a - 1) = b(1 - b) = c(1 - c)$ a využiť tvar paraboly, ktorý je grafom funkcie $f(x) = x(1 - x)$. Z obr. 2 vidíme, že podmienke $f(b) = f(c) = -f(a)$ naozaj vyhovuje nekonečne veľa trojíc vždy navzájom rôznych nezáporných čísel a, b, c.



Obr. 2

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho: 3 body za dôkaz, že medzi šiestimi skúmanými číslami sú vždy aspoň 4 rôzne; 3 body za príklad situácie, keď sú rôzne práve 4.

V prípade neúplného dôkazu tvrdenia, že sa jedná o aspoň 4 rôzne čísla, dajte: 1 bod za zmienku o symetrii a uvedenie oboch sérií nerovností typu (1); 1 bod za zostavenie sústavy (2). Len za dôkaz tvrdenia, že sa jedná vždy o aspoň 3 rôzne čísla, žiadny bod neudeľujte.

Za druhú časť riešenia strhnite 1 bod, ak postup nájdenia správnej trojice (a, b, c) (napríklad uhádnutím) vyžaduje chýbajúce overenie, že v skúmanej šestici sú naozaj iba 4 rôzne hodnoty. Na také overovanie stačí vypísať prislúchajúcich šesť hodnôt, ak je ich porovnanie zrejmé.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný, Vojtech Bálint

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020