

**70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A
(maďarská verzia)**

ELSŐ VERSENYNAP, 2021. MÁRCIUS 22.

1. Az a számláló, amelynek 1010, a nevezőben pedig 1011 mezője szerepel, játéktervként szolgál egy kétjátékos játékhoz.

$$\frac{\square + \square + \dots + \square}{\square + \square + \dots + \square + \square}$$

A játékosok felváltva mozognak. Minden fordulóban a játékos kiválaszt egyet a 1, 2, ..., 2021 számokból és beírja bármelyik üresbe dobozok. Minden szám csak egyszer használható. A kezdő játékos nyer, ha a törés értéke kitöltés után az összes mező kevesebb, mint 10^{-6} , különbözik az 1-es számtól. Ellenkezőleg ebben az esetben a másik játékos nyer. Döntse el, melyik játékosnak van a nyertese stratégia.

2. Legyen I a ABC derékszögbe írt kör közepe derékszöggel a csúcson A . Jelöljük ezután a M és N szerdákat AB és BI vonalak. Bizonyítsuk be, hogy a CI egyenes érintője a körnek leírt háromszöget BMN .

3. A különböző, nem nulla valós számok a a , b , c kielégítik egymást állítsa be az egyenlőséget

$$\{a + b, b + c, c + a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az egyenlőség is érvényes

$$\{a, b, c\} = \{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}.$$

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Karol Gajdoš, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Oliver Ralík, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020

**70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021**

**Úlohy celoštátneho kola kategórie A
(maďarská verzia)**

MÁSODIK VERSENYNAP, 2021. MÁRCIUS 23.

4. Keresse meg az összes természetes számot, amelyre érvényes az egyenlőség

$$n + d(n) + d(d(n)) + \dots = 2021,$$

ahol $d(0) = d(1) = 0$ és $k > 1$ esetén $d(k)$ k szétosztó (azaz legnagyobb osztója d a $d < k$ tulajdonsággal).

5. A karakterláncot akkor hívjuk *neat*, ha egyenletes hosszúságú és annak van az első fele megegyezik a második felével (pl. *abab*). Húrnak nevezünk *nice*, ha többre bontható egyes karakterláncok (például *abcabcdedeff* - *abcabc*, *dede* és *ff*). Itt egy karakterlánc csökkentésével egy műveletet hívunk, amelyben egy karakterláncból két azonos szomszédos karaktert törölünk (pl. a *abbac* karakterlánc talán *aac* -ra, a továbbiakban pedig *c* -ra csökkent. Bizonyítsd be, hogy ez önkényes egy karakterlánc, amely az egyes karaktereket páros lehetséges számban tartalmazza szerezzen be egy megfelelő szép láncból egy sor redukciót.
6. Adott háromszög ABC . Minden belső pontjára X jelöljük a képeit tengelyszimetriában: X_a, X_b, X_c egymás után a BC, CA, AB sorok szerint. Bizonyítsd be, hogy minden a $X_a X_b X_c$ háromszögeknek van egy közös pontjuk.

A feladatok megoldására 4,5 óra áll rendelkezésre. Minden feladatért legfeljebb 7 pont szerezhető. A verseny folyamán tilos az elektronikus eszközök, valamint az írásos jegyzetek használata.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Karol Gajdoš, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Oliver Ralík, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2020