70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021 *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *Zlomok s 1010 políčkami v čitateli a 1011 políčkami v menovateli slúži ako hrací plán pre hru dvoch hráčov.*

$$\frac{\square + \square + \ldots + \square}{\square + \square + \ldots + \square + \square}$$

Hráči sa striedajú v ťahoch. V každom ťahu hráč vyberie jedno z čísel 1, 2, …, 2021 *a vloží ho do ľubovoľného prázdneho políčka. Každé číslo pritom môže byť použité iba raz. Začínajúci hráč vyhráva, ak sa hodnota zlomku po zaplnení všetkých políčok líši od čísla* 1 *o menej ako* 10^{-6}. *V opačnom prípade vyhráva druhý hráč. Rozhodnite, ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu.* (Pavel Šalom)

Riešenie. Ukážeme, že vyhrávajúcu stratégiu má začínajúci hráč. Nazvime ho A a jeho protivníka označme B. Opíšeme najskôr postup hráča A, ktorým zabezpečí, že menovateľ výsledného zlomku bude práve o 1 väčší ako jeho čitateľ.

Hráč A pri svojom prvom ťahu vloží číslo 1 do menovateľa. Kedykoľvek hráč B pri svojom ťahu vyberie a vloží do zlomku číslo x, hráč A pri následnom ťahu vyberie číslo $2023 - x$ a vloží ho do tej istej časti zlomku, kam vložil hráč B číslo x (t. j. obe po sebe vložené čísla x a $2023 - x$ budú buď v čitateli, alebo v menovateli).

Vysvetlíme, prečo opísanú stratégiu môže hráč A vždy uskutočniť. Najskôr si uvedomíme, že po vložení čísla 1 do menovateľa bude ako v čitateli, tak v menovateli *párny počet voľných políčok* (konkrétne 1010 v oboch častiach zlomku). Táto vlastnosť zostane zrejme zachovaná po každom ťahu hráča A. Preto sa nemôže stať, že by hráč B pri niektorom svojom ťahu obsadil posledné voľné políčko čitateľa alebo menovateľa.

Nemôže sa stať ani to, že by číslo, ktoré má hráč A po niektorom ťahu hráča B vkladať, bolo už skôr vybrané, lebo po úvodnom vložení čísla 1 možno zvyšné čísla od 2 do 2021 rozdeliť na dvojice čísel s rovnakým súčtom 2023:

$$\{2, 2021\}, \{3, 2020\}, \{4, 2019\}, \ldots, \{1011, 1012\}.$$

Znamená to, že pri každom svojom ťahu hráč B nejakú z týchto dvojíc „načne“ a hráč A ju následne „dokončí“. Tým je sľúbené vysvetlenie ukončené.

Opísaná stratégia hráča A zaručí, že po zaplnení všetkých políčok bude hodnota čitateľa rovná $505 \cdot 2023$, zatiaľ čo hodnota menovateľa bude $505 \cdot 2023 + 1$. Keďže pre taký zlomok platí

$$0 < 1 - \frac{505 \cdot 2023}{505 \cdot 2023 + 1} = \frac{1}{505 \cdot 2023 + 1} < \frac{1}{500 \cdot 2000} = 10^{-6},$$

hráč A bude víťazom.

---

2. *Označme I stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Ďalej označme M a N stredy úsečiek AB a BI. Dokážte, že priamka CI je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BMN.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Riešenie. Označme $S \neq C$ druhý priesečník priamky CI s kružnicou ABC.[1] Dokážeme, že priamka CI sa dotýka kružnice BMN práve v bode S.

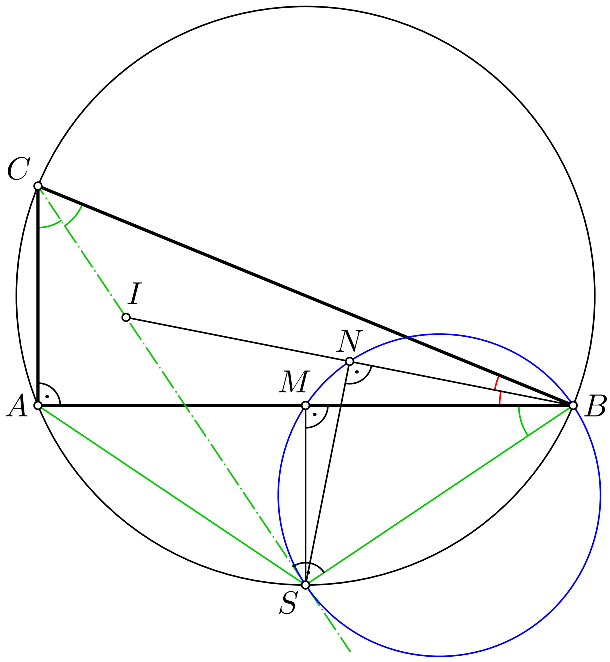
[1] Pre stručnosť budeme pod „kružnicou PQR“ rozumieť kružnicu opísanú trojuholníku PQR.

Je známe, že bod S je stred kružnice AIB. Tento výsledok platí pre všeobecný trojuholník ABC a uvedieme teraz jeho krátky dôkaz. Keďže CS je os uhla ACB, prislúchajú v ňom ležiacim oblúkom SA a SB kružnice ABC zhodné obvodové uhly, odkiaľ vyplýva $|SA| = |SB|$. Druhú potrebnú rovnosť $|SB| = |SI|$ dokážeme cez uhly trojuholníka BIS pri vrcholoch B a I:

$$|\angle BIS| = |\angle BCI| + |\angle CBI| = |\angle ACS| + |\angle ABI| = |\angle ABS| + |\angle ABI| = |\angle IBS|.$$

Dokopy máme $|SA| = |SB| = |SI|$ a dôkaz je ukončený.

Keďže S je stred kružnice AIB, pre stredy M, N jej tetív AB, BI platí $SM \perp MB$ a $SN \perp NB$, takže body S, M, N, B ležia na (Tálesovej) kružnici nad priemerom BS (obr. 1). Stred kružnice BMN je teda stredom úsečky BS, a preto na dokončenie celého riešenia stačí zdôvodniť, že $|\angle CSB| = 90°$. Obvodový uhol CSB v kružnici ABC je však zhodný s obvodovým uhlom CAB, a ten je podľa zadania úlohy naozaj pravý.



Obr. 1

Poznámka. Rolu bodu S v riešení úlohy naznačuje fakt, že uvažovaná kružnica BMN je v rovnoľahlosti $\mathcal{H}\left(B, \frac{1}{2}\right)$ obrazom kružnice AIB, ktorej stred je práve bod S. Z toho totiž hneď vyplýva kľúčový poznatok, že úsečka BS je priemerom kružnice BMN, ktorej sa má priamka CI dotýkať.

---

3. *Navzájom rôzne nenulové reálne čísla a, b, c spĺňajú množinovú rovnosť*

$$\{a+b, b+c, c+a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokážte, že platí aj rovnosť

$$\{a, b, c\} = \left\{a^2-2, b^2-2, c^2-2\right\}.$$

(*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Čísla a, b, c sú navzájom rôzne a nenulové, takže sú navzájom rôzne ako čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$, tak aj čísla ab, bc, ca. Preto sú množiny z prvej vety zadania zapísané správne, t. j. sú naozaj trojprvkové. Toto úvodné konštatovanie v ďalších riešeniach opakovať nebudeme.

Keďže zadanie úlohy je v číslach a, b, c symetrické, môžeme rovnosť posudzovaných trojprvkových množín vyjadriť tromi principiálne odlišnými sústavami rovníc[2]

$$\begin{aligned} a+b&=ab, \\ b+c&=bc, \\ c+a&=ca, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+b&=ab, \\ b+c&=ca, \\ c+a&=bc, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+b&=bc, \\ b+c&=ca, \\ c+a&=ab. \end{aligned}$$

V prípade prvej sústavy dostávame odčítaním jej druhej rovnice od prvej vzťah $a-c= b(a-c)$. Z toho vzhľadom na predpoklad $a \neq c$ vyplýva $b=1$. To však odporuje prvej rovnici skúmanej sústavy.

Podobne v prípade druhej sústavy dostávame odčítaním tretej rovnice od druhej vzťah $b-a=c(a-b)$, takže vďaka $a \neq b$ máme $c=-1$. Dosadením do sústavy dostaneme rovnice $a+b=ab$ a $a+b=1$, odkiaľ $ab=1$. Čísla a, b sú preto korene rovnice $x^2-x+1=0$. Tá však reálne korene nemá.

Zostáva nám tak rozobrať prípad tretej sústavy. Označme jej rovnice zhora nadol (1), (2), (3). V ich dôsledku platí

$$ab^2 \overset{(3)}{=} b(c+a) = bc+ab \overset{(1),(3)}{=} (a+b)+(c+a) = 2a+(b+c) \overset{(2)}{=} 2a+ca = a(2+c).$$

Porovnaním oboch krajných výrazov dostávame $ab^2=a(2+c)$, odkiaľ vzhľadom na $a \neq 0$ máme $b^2=2+c$, čiže $c=b^2-2$. Keďže skúmaná tretia sústava je cyklická, platí tiež $a=c^2-2$ a $b=a^2-2$. Množinová rovnosť zo záveru zadania úlohy je tak dokázaná.

Iné riešenie. Ukážeme, že tretiu sústavu z pôvodného riešenia

$$a+b=bc \tag{1}$$
$$b+c=ca \tag{2}$$
$$c+a=ab \tag{3}$$

možno posúdiť tak, že ju začneme riešiť bežnou eliminačnou metódou. Z (3) vyjadríme $c=ab-a$ a dosadíme také c do (2). Dostaneme po úprave $a^2-a=b(a^2-a-1)$. Všimnime si, že podľa (2) platí $a \neq 1$, čo spolu s $a \neq 0$ dáva $a^2-a \neq 0$. Preto zo vzorca $a^2-a=b(a^2-a-1)$ vyplýva nerovnosť $a^2-a-1 \neq 0$ a vyjadrenie $b= (a^2-a)/(a^2-a-1)$. Po jeho dosadení do (3) dostaneme $c=a/(a^2-a-1)$. Rovnicu (1) tak môžeme prepísať na tvar

$$a+\frac{a^2-a}{a^2-a-1}=\frac{a^2-a}{a^2-a-1}\cdot\frac{a}{a^2-a-1},$$

odkiaľ po úpravách dostaneme rovnicu

$$0=a^5-a^4-4a^3+3a^2+2a=a(a-2)(a^3+a^2-2a-1).$$

[2] Rozlíšime pritom, koľko rovníc typu $x+y=xy$ spĺňajú dvojice $\{x,y\}$ vybrané z $\{a,b,c\}$. Buď to sú všetky tri dvojice či práve jedna z nich, alebo to nie je žiadna.

Keďže $a \neq 0$ a rovnosť $a = 2$ by podľa (2) znamenala $b = c$, prichádzame k záveru, že číslo a je nutne koreňom mnohočlena

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Keďže skúmaná sústava je cyklická, korene polynómu $Q(x)$ sú aj čísla b a c, takže platí rozklad $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.[3] Na doriešenie úlohy preto stačí dokázať, že čísla a^2-2, b^2-2, c^2-2 sú tiež navzájom rôzne korene polynómu $Q(x)$.

Najskôr zdôvodníme vzájomnú rôznosť: vzhľadom na symetriu stačí vylúčiť napr. rovnosť $a^2-2 = b^2-2$. Podľa nej by platilo $a = b$ alebo $a = -b$. Prvá rovnosť odporuje zadaniu priamo, z druhej rovnosti podľa (1) vyplýva $bc = 0$, čo je tiež v spore so zadaním.

Dokázať, že čísla a^2-2, b^2-2, c^2-2 sú korene mnohočlena $Q(x)$, znamená to isté čo overiť, že mnohočlen $Q\big(x^2-2\big)$ je deliteľný tromi rôznymi koreňovými činiteľmi $x-a$, $x-b$, $x-c$, a teda aj ich súčinom, t. j. polynómom $Q(x)$. Je teda jasné, ako riešenie dokončiť: najskôr vypočítame

$$Q\big(x^2-2\big) = (x^2-2)^3 + (x^2-2)^2 - 2(x^2-2) - 1 = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$$

a potom sa použitím známeho algoritmu presvedčíme, že delenie $Q\big(x^2-2\big) : Q(x)$ vyjde bezo zvyšku. Zapíšeme tu iba výsledok tohto delenia v podobe rozkladu

$$Q\big(x^2-2\big) = Q(x) \cdot (x^3 - x^2 - 2x + 1).$$

Poznámky. Korene polynómu $Q(x)$ sú čísla $2\cos\frac{2}{7}\pi \doteq 1{,}24698$, $2\cos\frac{4}{7}\pi \doteq -0{,}44504$ a $2\cos\frac{6}{7}\pi \doteq -1{,}80194$. Také sú teda (až na poradie) hodnoty ľubovoľnej trojice čísel a, b, c vyhovujúcich zadaniu úlohy.

Naznačme odlišný dôkaz tvrdenia, že trojica $\{a, b, c\}$ koreňov odvodeného polynómu $Q(x)$ je zhodná s trojicou $\{a^2-2, b^2-2, c^2-2\}$ (nebude pritom nutné vopred zdôvodňovať, že sa jedná aj o tri rôzne čísla). Spomenutý fakt vyjadríme pomocou Vietových vzorcov rovnosťami

$$\begin{aligned} a+b+c &= -1 = (a^2-2)+(b^2-2)+(c^2-2),\\ ab+bc+ca &= -2 = (a^2-2)(b^2-2)+(b^2-2)(c^2-2)+(c^2-2)(a^2-2),\\ abc &= 1 = (a^2-2)(b^2-2)(c^2-2). \end{aligned}$$

Je teda nutné dokázať, že z troch ľavých rovností vyplývajú všetky tri pravé rovnosti. Nebudeme sa touto algebraickou previerkou tu zaoberať.

Iné riešenie. Nezávisle na prvých dvoch riešeniach opíšeme ešte jedno odvodenie toho kubického polynómu $Q(x) = x^3 - sx^2 + rx - p$, ktorého korene sú zadané (navzájom rôzne) čísla a, b, c. (Zvyšok druhého riešenia potom opakovať nebudeme.) K hľadaným hodnotám $s = -1$, $r = -2$ a $p = 1$ dôjdeme tak, že pre tieto neznáme čísla určená Vietovými vzorcami

$$s = a+b+c, \quad r = ab+bc+ca, \quad p = abc$$

[3] Je možné overiť, že korene $Q(x)$ sú tri navzájom rôzne reálne čísla, ale nie je to nevyhnutné. Podľa zadania úlohy totiž vyhovujúce čísla a, b, c existujú.

najskôr trojakým použitím rovnosti $\{a+b, b+c, c+a\} = \{ab, bc, ca\}$ získame sústavu troch rovníc, ktorú potom vyriešime.

Z rovnosti súčtu prvkov v oboch trojprvkových množinách

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) = ab+bc+ca$$

máme prvú rovnicu $2s = r$. Sčítanie súčinov dvojíc čísel v každej z oboch množín vedie k druhému dôsledku

$$(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b) = ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab,$$

ktorý možno upraviť na tvar $(a+b+c)^2+(ab+bc+ca) = abc(a+b+c)$, t. j. $s^2+r = p\cdot s$. Napokon v rovnosti súčinov trojíc čísel

$$(a+b)(b+c)(c+a) = ab\cdot bc\cdot ca$$

je ľavá strana rovná $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc = s\cdot r-p$ a pravá je p^2, takže platí $s\cdot r = p^2+p$. Výslednú sústavu troch rovníc

$$2s = r, \quad s^2+r = p\cdot s, \quad s\cdot r = p^2+p$$

elimináciou $r = 2s$ zredukujeme na sústavu

$$s^2+2s = p\cdot s, \tag{4}$$
$$2s^2 = p^2+p. \tag{5}$$

V prípade $s = 0$ z (5) vyplýva $p^2+p = 0$, takže $p \in \{0, -1\}$. Tejto situácii zodpovedajú polynómy $Q_1(x) = x^3$ a $Q_2(x) = x^3+1$, žiadny z nich však zrejme nemá tri rôzne reálne korene. Nutne teda platí $s \neq 0$.

Po vydelení (4) číslom $s \neq 0$ dostaneme $s+2 = p$. Dosadením takého p do (5) dostaneme kvadratickú rovnicu $0 = s^2-5s-6 = (s-6)(s+1)$. Do úvahy tak prichádzajú jediné dve riešenia $(s,r,p) \in \{(6,12,8), (-1,-2,1)\}$. Prvému z nich zodpovedá mnohočlen $Q_3(x) = x^3-6x^2+12x-8 = (x-2)^3$ s iba jedným reálnym koreňom, druhému riešeniu mnohočlen $Q_4(x) = x^3+x^2-2x-1 = 0$. Hľadaný mnohočlen $Q(x)$ je teda nutne rovný polynómu $Q_4(x)$.

Poznámka. Výpočet čísel s, r, p môžeme zjednodušiť, keď využijeme úvodný poznatok z prvého riešenia, podľa ktorého čísla a, b, c po prípadnom preznačení (danom zmenou ich poradia) spĺňajú sústavu rovností

$$a+b = bc, \quad b+c = ca, \quad c+a = ab. \tag{6}$$

Porovnaním rozdielov ich ľavých a prislúchajúcich pravých strán dostaneme rovnosti

$$a-c = c(b-a), \quad b-a = a(c-b), \quad c-b = b(a-c).$$

Ak porovnáme teraz súčin troch ľavých strán so súčinom troch pravých strán, potom po vydelení nenulovým číslom $(a-b)(b-c)(c-a)$ už dostaneme prvú z troch neznámych hodnôt, konkrétne $p = abc = 1$.

Ak prepíšeme nanovo rovnosti (6) na tvar

$$a = b(c-1), \quad b = c(a-1), \quad c = a(b-1),$$

potom podobnou procedúrou vynásobenia vzhľadom na $abc \neq 0$ dostaneme rovnosť $1 = (a-1)(b-1)(c-1)$. Z nej po roznásobení a dosadení hodnoty $abc = 1$ vyjde pre neznáme $s = a+b+c$ a $r = ab+bc+ca$ rovnica $r = s-1$. Tá spolu s rovnicou $2s = r$, ktorú získame sčítaním rovností (6), už vedie k určeniu hodnôt $s = -1$ a $r = -2$.

4. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí rovnosť*

$$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2021,$$

pričom $d(0) = d(1) = 0$ a pre $k > 1$ je $d(k)$ superdeliteľ čísla k (t. j. jeho najväčší deliteľ d s vlastnosťou $d < k$). (*Tomáš Bárta*)

Riešenie. Podobne ako v domácom kole využijeme poznatok, že pre superdeliteľa $d(m)$ celého čísla $m > 1$ platí vzorec $d(m) = m/p$, pričom p je najmenší prvočiniteľ čísla m.

Rozložme teda hľadané n na prvočinitele: $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, pričom $p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_k$ sú prvočísla. Potom vďaka úvodnému poznatku môžeme rovnosť zo zadania prepísať na tvar

$$p_1 \ldots p_k + p_1 \ldots p_{k-1} + p_1 \ldots p_{k-2} + \cdots + p_1 p_2 + p_1 + 1 = 2021.$$

Po odčítaní čísla 1 postupným vynímaním na ľavej strane dostaneme

$$p_1(1 + p_2(1 + p_3(1 + \cdots + p_{k-1}(1 + p_k) \ldots))) = 2020. \tag{1}$$

Vidíme, že $p_1 \mid 2020 = 101 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$. Keďže p_1 je prvočíslo, máme 3 možnosti:

a) $p_1 = 101$. Z (1) vyplýva $1 + p_2(\ldots) = 20$, takže $p_2 \mid 19$, a teda $p_2 = 19$ (a $k = 2$), čo vďaka $101 > 19$ vedie naozaj k riešeniu $n = 101 \cdot 19 = 1919$.

b) $p_1 = 5$. Z (1) vyplýva $1 + p_2(\ldots) = 404$, takže $p_2 \mid 403$. Podľa $5 = p_1 \geqq p_2$ však prvočíslo p_2 môže byť iba 2, 3 alebo 5, nie je to teda deliteľ čísla $403 = 13 \cdot 31$.

c) $p_1 = 2$. Z (1) vyplýva $1 + p_2(\ldots) = 1010$, takže $p_2 \mid 1009$. To však odporuje tomu, že podľa $2 = p_1 \geqq p_2$ je $p_2 = 2$.

Záver. Jediné vyhovujúce číslo je $n = 1919$.

5. *Reťazec znakov nazveme úhľadným, keď má párnu dĺžku a jeho prvá polovica je zhodná s druhou polovicou (napr. abab). Reťazec nazveme pekným, ak ho možno rozdeliť na niekoľko úhľadných reťazcov (ako abcabcdedeff na abcabc, dede a ff). Redukciou reťazca nazveme operáciu, pri ktorej z reťazca zotrieme dva rovnaké susedné znaky (napr. reťazec abbac možno zredukovať na aac a ten ďalej na c). Dokážte, že ľubovoľný reťazec obsahujúci každý svoj znak v párnom počte možno získať sériou redukcií z vhodného pekného reťazca.* (*Martin Melicher*)

Riešenie. Vo všetkých riešeniach budeme označovať $\overline{T}$ reťazec, ktorý vznikne z reťazca T „otočením“ jeho znakov, t. j. ich zapísaním v opačnom poradí (od posledného znaku po prvý). Okrem toho budeme používať vnútri reťazcov okrúhle zátvorky, ktoré nebudeme považovať za znaky, ale iba za vizuálne oddeľovače. Budeme tiež pracovať s prázdnym reťazcom, ktorý je redukciou každého reťazca *aa* s dvoma rovnakými znakmi.

Pre ľubovoľný reťazec X zrejme platí, že reťazec $\overline{X}X$ možno sériou redukcií previesť na prázdny reťazec, a to postupným odoberaním dvojíc rovnakých znakov „zo stredu“.

Nech X a Y sú ľubovoľné (nie nutne neprázdne) reťazce a nech P je nejaký pekný reťazec, ktorý možno sériou redukcií previesť na XY. Potom reťazec $\overline{X}\,\overline{X}P$ je tiež pekný a možno ho previesť na reťazec $\overline{X}(\overline{X}X)Y$, ktorý možno podľa predchádzajúceho odseku ďalej previesť na $\overline{X}Y$.

Dokázané tvrdenie o dvojici reťazcov $T = XY$ a $T_1 = \overline{X}Y$ môžeme vysloviť takto: Ak možno daný reťazec T získať sériou redukcií z pekného reťazca, platí to isté aj o každom reťazci T_1, ktorý získame z reťazca T otočením niektorého jeho „začiatku“ X (môže byť aj $X = T$). Uvedomme si, že postupnosťou takých otočení možno z daného reťazca T vytvoriť ľubovoľnú permutáciu jeho znakov. Naozaj, ľubovoľný znak z T možno najskôr jedným otočením presunúť na počiatok reťazca (ak tam už pôvodne nestojí) a potom ďalším otočením (celého reťazca) na jeho koniec. Opakovaním tejto procedúry dokážeme (postupne od konca) vytvoriť akúkoľvek permutáciu znakov reťazca T.

Uvažujme teraz podľa zadania úlohy ľubovoľný reťazec T, ktorý obsahuje každý svoj znak v párnom počte. V takom reťazci T možno zrejme preusporiadať znaky tak, aby vyšiel nejaký úhľadný reťazec T'. Ten je už sám o sebe pekný, takže podľa predchádzajúceho odseku možno sériami redukcií pekných reťazcov získať každý taký reťazec, ktorý vznikne z reťazca T' permutáciou jeho znakov. Keďže jedna taká permutácia dáva východiskový reťazec T, je riešenie úlohy ukončené.

Poznámka. K výsledku úlohy dodajme, že reťazce obsahujúce každý svoj znak v párnom počte sú práve tie, ktoré sa dajú získať sériou redukcií z nejakého pekného reťazca. Jednu implikáciu sme dokázali vyriešením zadanej úlohy, druhá vyplýva okamžite z toho, že každá redukcia daného reťazca zachováva paritu všetkých počtov jeho jednotlivých znakov.

Iné riešenie. O reťazci hovoríme, že je *párny*, ak obsahuje každý znak v párnom počte. Máme teda dokázať, že každý párny reťazec možno získať sériou redukcií z nejakého pekného reťazca. Dôkaz urobíme matematickou indukciou podľa dĺžky párneho reťazca.

Najmenšiu párnu dĺžku 0 má iba prázdny reťazec, pre ktorý tvrdenie platí triviálne.

V druhom indukčnom kroku uvažujme párny neprázdny reťazec T a označme a jeho prvý znak. Písmeno a sa v T nachádza ešte na niektorej ďalšej pozícii, čo umožňuje zapísať T v tvare $T = aXaY$, pričom X a Y sú vhodné (nie nutne neprázdne) reťazce. Keďže reťazec $\overline{X}Y$ je párny a kratší ako T (o dva znaky), podľa indukčného predpokladu možno $\overline{X}Y$ získať sériou redukcií z vhodného pekného reťazca A, čo zapíšeme symbolicky takto: $A \rightarrowtail \overline{X}Y$. Potom $A' = (aXaX)A$ je tiež pekný reťazec, ktorý dokážeme zredukovať na východiskový reťazec T spôsobom, pri ktorom vhodné série redukcií zapíšeme opäť symbolicky:

$$A' = (aXaX)A \rightarrowtail (aXaX)(\overline{X}Y) = aXa(X\overline{X})Y \rightarrowtail aXaY = T.$$

(Séria redukcií reťazca $X\overline{X}$ na prázdny je zrejmá, pozri prvé riešenie). Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Iné riešenie. Pozrime sa na riešenú situáciu „od konca“: Do zadaného reťazca T, ktorý obsahuje každý svoj znak v párnom počte, sa budeme snažiť opakovane vkladať dvojice rovnakých znakov, kým nedostaneme pekný reťazec.[4] Každá čiastočná séria vkladaní bude vyzerať nasledovne.

V aktuálnom reťazci vyberieme niektorý úsek $a_1a_2\ldots a_n$ zložený z niekoľkých susedných znakov a_i. Do tohto úseku postupne vložíme dvojice a_1a_1, a_2a_2,$\ldots$, a_na_n

[4] Dvojicu rovnakých znakov budeme nielen vkladať medzi niektoré dva susedné znaky aktuálneho reťazca, ale aj prípadne pripisovať za jeho posledný znak.

takto:

$$\begin{gathered}(a_1a_2\dots a_n)\to(a_1a_2\dots a_n)a_1a_1\to(a_1a_2\dots a_n)a_1a_2a_2a_1\to\\ \to(a_1a_2\dots a_n)a_1a_2a_3a_3a_2a_1\to\dots\to(a_1a_2\dots a_n)(a_1a_2\dots a_n)(a_na_{n-1}\dots a_1).\end{gathered}$$

Vidíme, že sme východiskový úsek $C=a_1a_2\dots a_n$ otočili na $\overline{C}=a_na_{n-1}\dots a_1$ s tým, že sa nám pred $\overline{C}$ zľava objavili dve nové kópie C v podobe úhľadného reťazca CC. Celý postup úpravy zvoleného úseku $C=a_1a_2\dots a_n$ vyjadríme skráteným zápisom s jednou šípkou: $C\to CC\overline{C}$.

Teraz už sme pripravení opísať celkový algoritmus úprav počiatočného reťazca T. Rovnako ako v druhom riešení ho najskôr zapíšeme v tvare $T=xAxB$, pričom x je prvý znak T a A, B sú vhodné (nie nutne neprázdne) reťazce. Použitím navrhnutej úpravy postupne pre úseky $C=xA$ a $C=\overline{A}xx$ dostaneme

$$\begin{aligned}T=&(xA)xB\to(xA)(xA)(\overline{A}x)xB=(xA)(xA)(\overline{A}xx)B\to\\ &\to(xA)(xA)(\overline{A}xx)(\overline{A}xx)(xxA)B=(xAxA)(\overline{A}xx\overline{A}xx)(xx)AB.\end{aligned}\tag{1}$$

Všetky úseky v zátvorkách posledného reťazca sú úhľadné, pritom koncový úsek $T'=AB$ je o 2 kratší ako T (a má všetky svoje znaky zastúpené v párnom počte). Ak nie je T' prázdny reťazec, zopakujeme v druhom kroku úpravy (1) pre T' namiesto T, atď. Je zrejmé, že po konečnom počte krokov dostaneme pekný reťazec, ako sme si na úvod tohto riešenia vytýčili.

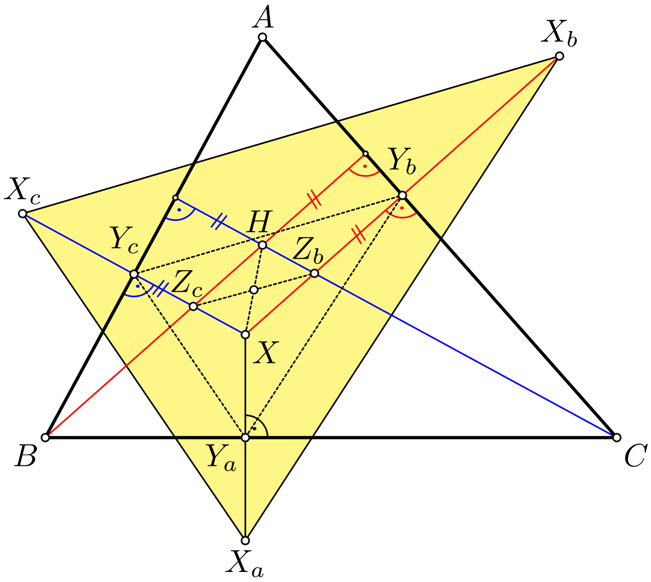
---

6. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Pre každý jeho vnútorný bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, CA, AB. Dokážte, že všetky trojuholníky $X_aX_bX_c$ majú spoločný bod.* (Josef Tkadlec)

Riešenie. V limitnom prípade, keď $X=A$, trojuholník $X_aX_bX_c$ degeneruje na úsečku, ktorá leží na priamke obsahujúcej výšku trojuholníka ABC na stranu BC. Podobne to funguje v prípadoch $X=B$ a $X=C$. Spolu to naznačuje, že hľadaným spoločným bodom všetkých trojuholníkov $X_aX_bX_c$ bude ortocentrum H trojuholníka ABC. Dokážeme, že je to naozaj tak.

Označme najskôr Y_a, Y_b, Y_c kolmé priemety bodu X postupne na strany BC, CA, AB. Bod X podľa zadania leží vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC, takže Y_a, Y_b, Y_c sú vnútorné body prislúchajúcich strán a navyše X je vnútorným bodom trojuholníka $Y_aY_bY_c$. Posledný fakt zdôvodníme takto: Štvoruholníky AY_bXY_c, BY_cXY_a, a CY_aXY_b sú podľa Tálesovej vety tetivové, a teda aj konvexné, takže bod X nie je bodom žiadneho z trojuholníkov AY_bY_c, BY_cY_a a CY_aY_b, teda leží vo „zvyšku“ trojuholníka ABC, ktorým je vnútro trojuholníka $Y_aY_bY_c$. Keďže body Y_a, Y_b, Y_c sú postupne stredmi úsečiek XX_a, XX_b, XX_c, z rovnoľahlosti $\mathcal{H}(X,2)$ vyplýva, že bod X leží aj vnútri trojuholníka $X_aX_bX_c$.

V prípade, keď $X=H$, záver predchádzajúceho odseku už znamená, že bod H leží vnútri $\triangle X_aX_bX_c$. Ak je X vnútorným bodom jednej z úsečiek AH, BH alebo CH, napríklad úsečky AH, tak H je vnútorným bodom úsečky XX_a, takže tiež leží vnútri $\triangle X_aX_bX_c$, ako sme mali dokázať. Ostáva teda rozobrať prípad, keď bod X neleží na žiadnej z úsečiek AH, BH ani CH. Vtedy bod X leží vnútri jedného z trojuholníkov BHC, CHA alebo AHB. Nech je to $\triangle BHC$ bez ujmy na všeobecnosti.



Obr. 2

Keďže $CH \parallel XX_c$, úsečka XX_c pretína úsečku BH v niektorom bode Z_c. Analogicky vďaka $BH \parallel XX_b$ úsečka XX_b pretína úsečku CH v niektorom bode Z_b. Použité rovnobežnosti navyše znamenajú, že vzniknutý štvoruholník XZ_bHZ_c je rovnobežník. Z toho vyplýva, že úsečky Z_bZ_c a XH majú spoločný stred.

Uvažujme teraz opäť rovnoľahlosť $\mathcal{H}(X, 2)$. Tá zobrazí úsečku Z_bZ_c na určitú úsečku, ktorej stred je podľa záveru predchádzajúceho odseku práve bod H. Ak teda ukážeme, že oba krajné body tejto úsečky, čiže obrazy bodov Z_b a Z_c, ležia v $\triangle XX_bX_c$, bude to znamenať, že v $\triangle XX_bX_c$ leží aj bod H. Tým budeme s celým riešením hotoví, lebo trojuholník XX_bX_c je časťou trojuholníka $X_aX_bX_c$ (X je totiž, ako vieme, jeho vnútorný bod). Potrebná vlastnosť obrazov Z_b a Z_c v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(X, 2)$ však vyplýva okamžite z nerovností

$$|XX_c| = 2|XY_c| > 2|XZ_c| \quad \text{a} \quad |XX_b| = 2|XY_b| > 2|XZ_b|.$$

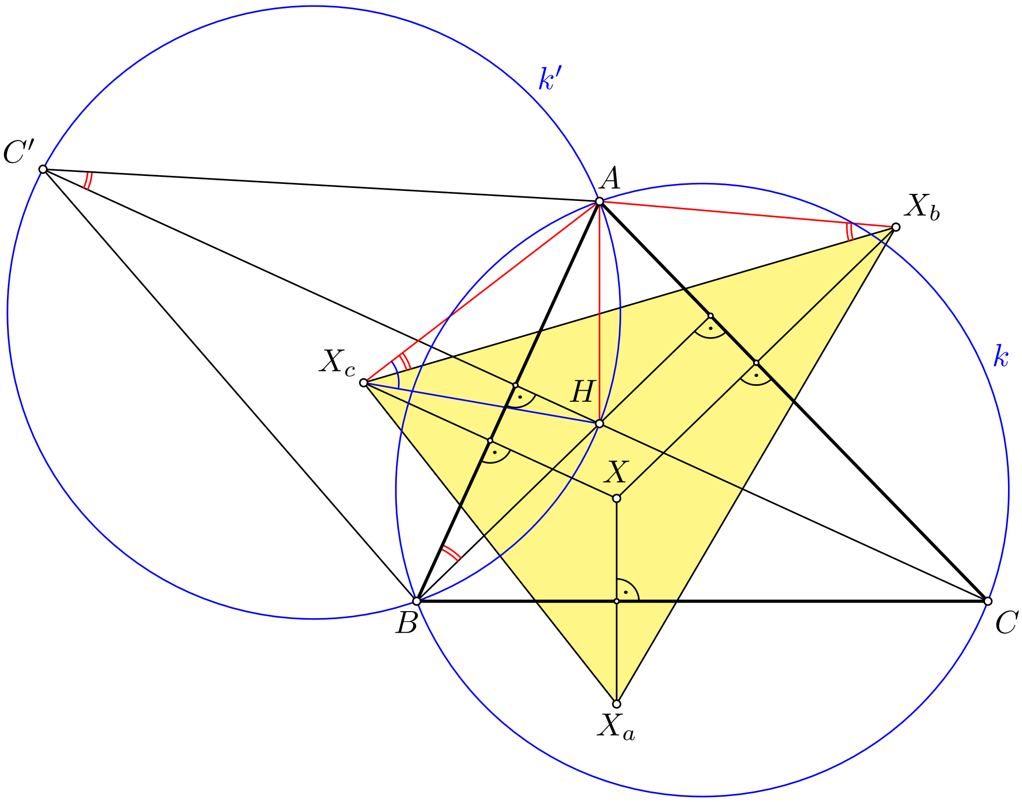
Iné riešenie. Odlišným spôsobom overíme, že ortocentrum H je (vnútorným) bodom trojuholníka $X_aX_bX_c$. Najskôr vysvetlíme, prečo nám na to stačí dokázať, že úsečka X_bX_c pretína úsečky AH, AX v ich vnútorných bodoch. To totiž bude vďaka symetrii zadania znamenať, že podobne pretína úsečka X_cX_a úsečky BH, BX a úsečka X_aX_b úsečky CH, CX, takže oba body H a X budú ležať vnútri prieniku troch polrovín opačných k polrovinám X_bX_cA, X_cX_aB a X_aX_bC. Týmto prienikom ale musí byť trojuholník $X_aX_bX_c$, lebo v ňom leží bod X, ako vieme z prvého riešenia (dôkaz tohto tvrdenia tu opakovať nebudeme).

Na dôkaz pretnutia úsečiek X_bX_c a AX využijeme rovnosti $|AX| = |AX_b| = |AX_c|$, ktoré vyplývajú z použitých osových súmerností a podľa ktorých je bod A stredom kružnice opísanej trojuholníku XX_bX_c. Keďže pre obvodový uhol X_bXX_c v tejto kružnici platí

$$|\measuredangle X_bXX_c| = 180^\circ - |\measuredangle BAC| > 90^\circ,$$

lebo podľa zadania $\alpha = |\measuredangle BAC| < 90^\circ$, pretína tetiva X_bX_c polomer AX v jeho vnútornom bode, ako sme chceli dokázať.

Pre dôkaz potrebného tvrdenia o úsečkách X_bX_c a AH si najskôr všimneme, že konvexný uhol X_cAX_b má vďaka konštrukcii bodov X_b, X_c veľkosť 2α a úsečka AH leží v tomto uhle. Ak preto dokážeme nerovnosť $|\measuredangle AX_cX_b| < |\measuredangle AX_cH|$, bude to už znamenať, že úsečka X_bX_c naozaj pretína úsečku AH v jej vnútornom bode.



Obr. 3

Ako už vieme, trojuholník AX_bX_c je rovnoramenný a má pri hlavnom vrchole A uhol veľkosti 2α. Preto majú oba zvyšné uhly pri vrcholoch X_b, X_c veľkosť $90° - \alpha$, akú má zrejme aj uhol ABH. Preto je potrebná nerovnosť $|\measuredangle AX_cX_b| < |\measuredangle AX_cH|$ ekvivalentná s nerovnosťou $|\measuredangle ABH| < |\measuredangle AX_cH|$, ktorú vo zvyšku riešenia dokážeme nasledujúcim postupom.

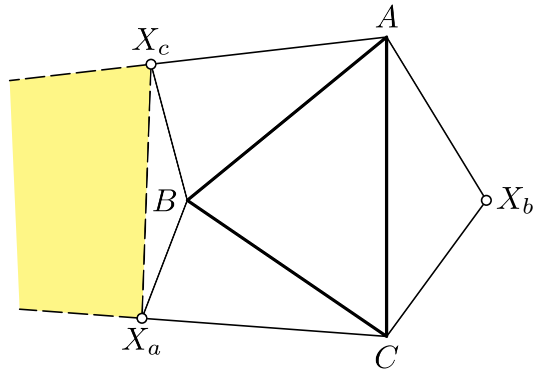
Je známe, že bod H leží na kružnici k', ktorá je obrazom kružnice k opísanej trojuholníku ABC v osovej súmernosti podľa priamky AB, presnejšie na tom jej oblúku AB, ktorý neobsahuje obraz C' vrcholu C.[5] Keďže bod X leží vnútri $\triangle ABC$, leží jeho obraz X_c vnútri $\triangle ABC'$, a teda aj vnútri kruhového odseku kružnice k' určenej oblúkom $AC'B$. Z toho už dostávame

$$|\measuredangle ABH| = |\measuredangle AC'H| < |\measuredangle AX_cH|,$$

ako sme potrebovali ukázať.

[5] Tento poznatok o ostrouhlom trojuholníku ABC možno pri zvyčajnom označení veľkostí uhlov dokázať takto: vďaka $AH \perp BC$ platí $|\measuredangle BAH| = 90° - \beta$, podobne vďaka $BH \perp AC$ platí $|\measuredangle ABH| = 90° - \alpha$, odkiaľ $|\measuredangle AHB| = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$, zatiaľ čo $|\measuredangle AC'B| = |\measuredangle ACB| = \gamma$; navyše body C' a H ležia v opačných polrovinách vyťatých priamkou AB.

Poznámka. Z dokázaného tvrdenia o pretnutí úsečiek v každej z dvojíc (AH, X_bX_c), (BH, X_bX_c) a (CH, X_cX_a) vyplýva nielen (v riešení využitý) záver, že bod H leží vnútri prieniku troch polrovín opačných k X_bX_cA, X_cX_aB a X_aX_bC, ale aj záver, že bod H leží vnútri troch (konvexných) uhlov X_bAX_c, X_cBX_a a X_aCX_b. Ani oba tieto závery však samy osebe neimplikujú, že bod H leží v trojuholníku $X_aX_bX_c$. Nie je nimi totiž vylúčená situácia z obr. 4, na ktorom je neprázdnym prienikom troch spomenutých polrovín a troch spomenutých uhlov žlto vyfarbená oblasť. Vylúčiť túto



Obr. 4

situáciu a súčasne dokázať, že z tvrdenia o dvojiciach úsečiek (AH, X_bX_c), (BH, X_bX_c), (CH, X_cX_a) vyplýva potrebný záver $H \in \triangle X_aX_bX_c$, môžeme nasledovne.

Uvažujme šesťuholník $\mathcal{M} = AX_cBX_aCX_b$, ktorý dostaneme, keď k trojuholníku ABC pozdĺž jeho strán „prilepíme“ zvonka trojuholníky ABX_c, BCX_a a CAX_b, ktoré sú súmerne združené postupne s trojuholníkmi ABX, BCX a CAX. Tento popis vzniku šesťuholníka $\mathcal{M}$ nám určuje jeho vnútro, podľa ktorého teraz rozhodneme o konvexnosti všetkých jeho vnútorných uhlov (presnejšie máme na mysli, že veľkosti týchto uhlov sú menšie ako 180°). O uhloch pri vrcholoch A, B, C to už vieme z riešenia. Uhly pri zvyšných vrcholoch X_a, X_b, X_c sú však zhodné postupne s uhlami AXB, BXC, CXA, takže sú aj konvexné, keďže bod X leží vnútri trojuholníka ABC. Šesťuholník $\mathcal{M}$ je teda konvexný. Z toho, že úsečka AH pretína úsečku X_bX_c, tým pádom vyplýva, že bod H leží v polrovine $X_aX_bX_c$, lebo tá je vďaka konvexnosti $\mathcal{M}$ polrovinou opačnou k X_bX_cA. Analogickou úvahou o úsečkách BH a CH dokopy dostaneme, že bod H leží vo všetkých troch polrovinách $X_aX_bX_c$, $X_bX_cX_a$ a $X_cX_aX_b$, teda naozaj platí $H \in$ $\in \triangle X_aX_bX_c$.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Karol Gajdoš, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Oliver Ralík, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021