

65. ročník Matematickej olympiády, 2015/2016

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

PRVÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 4. APRÍLA 2016

1. Nech $p > 3$ je dané prvočíslo. Určte počet všetkých usporiadaných šestic (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel, ktorých súčet je rovný $3p$, a pritom všetky zlomky

$$\frac{a+b}{c+d}, \frac{b+c}{d+e}, \frac{c+d}{e+f}, \frac{d+e}{f+a}, \frac{e+f}{a+b}$$

majú celočíselné hodnoty.

2. Označme postupne r a r_a polomery kružnice vpísanej a kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC . Dokážte, že ak platí

$$r + r_a = |BC|,$$

tak trojuholník ABC je pravouhlý.

3. Medzi obyvateľmi istého mesta sú populárne matematické kluby. Každé dva z nich majú aspoň jedného spoločného člena. Dokážte, že môžeme obyvateľom mesta rozdať kružidlá a pravítka tak, že iba jeden obyvateľ dostane oboje, a pritom každý klub bude mať pri plnej účasti svojich členov k dispozícii ako pravítko, tak kružidlo.

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Ivan Cimrák, Šárka Gergetsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016

**65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016**

Úlohy celoštátneho kola kategórie A

DRUHÝ SÚŤAŽNÝ DEŇ, 5. APRÍLA 2016

4. Pre kladné čísla a, b, c platí

$$(a + c)(b^2 + ac) = 4a.$$

Určte maximálnu hodnotu výrazu $b + c$ a nájdite všetky trojice čísel (a, b, c) , pre ktoré výraz túto hodnotu nadobúda.

5. V trojuholníku ABC platí $|BC| = 1$ a zároveň na strane BC existuje práve jeden bod D taký, že $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Určte všetky možné hodnoty obvodu trojuholníka ABC .
6. Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz.

Na riešenie úloh je 4,5 hodiny, za každú úlohu môžete získať najviac 7 bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť žiadne elektronické prístroje ani žiadne písomné materiály.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Ivan Cimrák, Šárka Gergetsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016