

67. ročník Matematickej olympiády  
2017/2018

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

1. Nájdite všetky mnohočleny tvaru  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ktoré po delení dvojčlenom  $2x^2 + 1$  dávajú zvyšok  $x + 2$  a po delení dvojčlenom  $x^2 + 2$  dávajú zvyšok  $2x + 1$ .  
(Pavel Calábek)

**Riešenie.** Pri delení (so zvyškom) mnohočlena tretieho stupňa mnohočlenom druhého stupňa je podiel rovný mnohočlenu prvého stupňa. Pritom jeho koeficient pri prvej mocnine je rovný podielu koeficientov pri najvyšších mocninách delenca a deliteľa, zatiaľ čo absolútny člen podielu je neznáma, ktorú pri daných dvoch deleniach označíme  $e$ , resp.  $g$ . Pre hľadaný mnohočlen tak má platiť

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (2x^2 + 1)\left(\frac{a}{2}x + e\right) + x + 2 = ax^3 + 2ex^2 + \left(\frac{a}{2} + 1\right)x + e + 2,$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + 2)(ax + g) + 2x + 1 = ax^3 + gx^2 + (2a + 2)x + 2g + 1.$$

Porovnaním koeficientov pravých strán predchádzajúcich dvoch rovností dostaneme

$$\begin{aligned} 2e &= g, \\ \frac{a}{2} + 1 &= 2a + 2, \\ e + 2 &= 2g + 1. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy je  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $g = \frac{2}{3}$ ,  $e = \frac{1}{3}$ . Úlohe preto vyhovuje jediný mnohočlen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

#### NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Určte podiel a zvyšok po delení mnohočlena  $2x^3 + x^2 - 3x + 5$  dvojčlenom  $x^2 - x$ . Túto skutočnosť zapíšte vo forme rovnosti bez použitia zlomkov. [ $2x^3 + x^2 - 3x + 5 = (x^2 - x)(2x + 3) + 5$ ]
- N2. Určte všetky kvadratické trojčleny  $ax^2 + bx + c$ , ktoré sú bezo zvyšku deliteľné ako dvojčlenom  $x - 2$ , tak dvojčlenom  $x + 1$ . [ $ax^2 - ax - 2a$ ,  $a \neq 0$ ]
- N3. Nájdite všetky trojčleny  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , ktoré dávajú po delení dvojčlenom  $x + 1$  zvyšok 2 a po delení dvojčlenom  $x + 2$  zvyšok 1, pričom  $p(1) = 61$ . [61-C-I-1]
- N4. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel  $(p, q)$  také, že mnohočlen  $x^2 + px + q$  je deliteľom mnohočlena  $x^4 + px^2 + q$ . [56-B-I-5]

2. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo  $t$  platia nerovnosti

$$0 \leq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leq |t - 1|.$$

(Tomáš Jurík)

**Riešenie.** Obe nerovnosti vynásobíme kladným číslom  $t + 1$ , aby sme sa zbavili zlomkov,

$$0 \leq t^2 + 1 - (t + 1)\sqrt{t} \leq |t - 1|(t + 1),$$

a pre jednoduchšie úpravy použijeme substitúciu  $u = \sqrt{t} > 0$ :

$$0 \leq u^4 + 1 - (u^2 + 1)u \leq |u^2 - 1|(u^2 + 1).$$

Zrejme platí  $u^4 + 1 - (u^2 + 1)u = u^4 - u^3 - u + 1 = (u^3 - 1)(u - 1)$  a  $|u^2 - 1|(u^2 + 1) = |u^4 - 1|$ , máme teda pre ľubovoľné kladné  $u$  dokázať nerovnosti

$$0 \leq (u^3 - 1)(u - 1) \leq |u^4 - 1|.$$

Ľavá nerovnosť teraz vyplýva zo známeho rozkladu  $u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1)$ , vďaka ktorému  $(u^3 - 1)(u - 1) = (u - 1)^2(u^2 + u + 1)$  je súčinom dvoch nezáporných čísel. Pravú nerovnosť potom dostaneme pomocou dvoch zrejmých odhadov:

$$(u^3 - 1)(u - 1) \leq |u - 1|(u^3 + 1) \leq |u - 1|(u^3 + u^2 + u + 1) = |u^4 - 1|.$$

Tým sú obe nerovnosti dokázané.

**Iné riešenie.** Na dôkaz oboch nerovností niekoľkokrát využijeme zrejmú nerovnosť  $2\sqrt{t} \leq t + 1$ , ktorá platí pre ľubovoľné kladné  $t$ . Pre ľavú nerovnosť tak máme

$$\frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \geq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \frac{t + 1}{2} = \frac{t^2 - 2t + 1}{2(t + 1)} = \frac{(t - 1)^2}{2(t + 1)} \geq 0$$

a pre pravú nerovnosť

$$\frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} = \frac{t^2 + 1 - (t + 1)\sqrt{t}}{t + 1} \leq \frac{t^2 + 1 - 2\sqrt{t}\sqrt{t}}{t + 1} = \frac{|t - 1|^2}{t + 1} \leq |t - 1|,$$

pretože  $|t - 1| \leq t + 1$  podľa trojuholníkovej nerovnosti.

#### NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo  $u$  platí

$$\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{u}} \geq \sqrt{u} + \sqrt{2}.$$

[Využite to, že dvojčlen  $\sqrt{u} - \sqrt{2}$  možno vyňať ako z rozdielu prvých, tak aj druhých sčítancov oboch strán. Úpravy na súčinový tvar môže uľahčiť, keď najskôr odstránime zlomky alebo použijeme vhodnú substitúciu, napr.  $s = \sqrt{u}$  či  $t = \sqrt{2/u}$ .]

N2. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo  $a$  platí

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}).$$

[Upravte nerovnosť na tvar  $\frac{1}{2}(a + a + 1) > \sqrt{a(a+1)}$ .]

N3. Dokážte, že pre každé reálne číslo  $x$  platí

$$1 + |x| \geq \sqrt{|x^2 - 1|}.$$

[Využite odhad  $1 + |x| \geq \frac{1}{2}(|x - 1| + |x + 1|)$  a potom AG nerovnosť.]

N4. Dokážte, že pre každé dve reálne čísla  $x, y$  platí

$$1 + |x| + |y| + |xy| \geq \sqrt{|x^2 - 1||y^2 - 1|}.$$

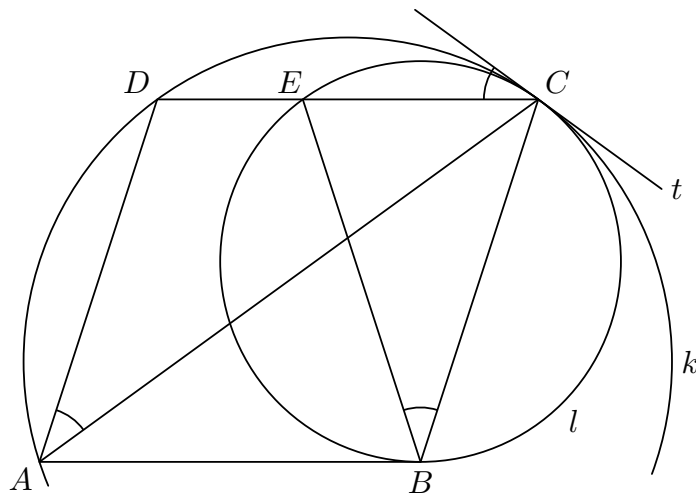
[Vysvetlite, prečo hodnota  $1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$  leží medzi hodnotami druhých mocnín ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti.]

**3.** Nech  $ABCD$  je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou  $BD$  a  $E$  vnútorný bod jeho strany  $CD$ , ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku  $ABD$ . Určte veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole  $A$ , ak majú kružnice opísané trojuholníkmi  $ACD$  a  $BCE$  práve jeden spoločný bod. (Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Hľadanú veľkosť vnútorného uhla pri vrchole  $A$  uvažovaného kosoštvorca označme  $\alpha$ . Ďalej označme  $k$  kružnicu opísanú trojuholníku  $ACD$  a  $l$  kružnicu opísanú trojuholníku  $BCE$ .

Z podmienok úlohy vyplýva, že  $ABED$  je rovnoramenný lichobežník s kratšou základňou  $ED$ . Je teda  $|EB| = |DA| = |CB|$ , takže trojuholník  $BCE$  je rovnoramenný so základňou  $CE$ .

Bod  $C$  je podľa zadania jediným spoločným bodom kružníc  $k$  a  $l$ , preto v tomto bode existuje spoločná dotyčnica  $t$  oboch kružníc (obr. 1). Vzhľadom na to, že  $E$  je vnútorným bodom strany  $CD$  (tetivy kružnice  $k$ ), majú vo vrchole  $C$  obe kružnice vnútorný dotyk. Prítom dotyčnica  $t$  zvierá ako s tetivou  $CD$  kružnice  $k$ , tak s tetivou  $CE$  kružnice  $l$  ten istý úsekový uhol vyznačený na obrázku. To znamená, že zodpovedajúce obvodové uhly prislúchajúce uvedeným tetivám kružníc  $k$  a  $l$  sú zhodné, čiže  $|\angle CAD| = |\angle CBE|$ .



Obr. 1

Keďže uhlopriečka  $AC$  je osou vnútorného uhla pri vrchole  $A$  v kosoštvorci  $ABCD$ , je  $|\angle CAD| = \frac{1}{2}\alpha$ , zatiaľ čo rovnoramenný trojuholník  $CEB$  má pri základni uhly veľkosti  $|\angle BEC| = |\angle BCE| = |\angle BAD| = \alpha$ , takže  $|\angle CBE| = 180^\circ - 2\alpha$ . Spolu tak dostávame pre veľkosť uhla  $\alpha$  rovnicu

$$180^\circ - 2\alpha = \frac{1}{2}\alpha,$$

ktorej riešením je  $\alpha = 72^\circ$ .

**NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:**

N1. Trojuholníku  $ABC$  s vnútornými uhlami  $\alpha, \beta, \gamma$  je opísaná kružnica. K tejto kružnici sú vedené dotyčnice v bodoch  $A, B, C$ . Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ohraničeného týmito dotyčnicami. Rozoberte rôzne tvary trojuholníka  $ABC$ . [Např.

pre ostrouhlý trojuholník s rôzne veľkými vnútornými uhlami majú uhly nového trojuholníka veľkosti  $180^\circ - 2\alpha$ ,  $180^\circ - 2\beta$ ,  $180^\circ - 2\gamma$ .]

- N2. Dokážte, že rovnoramennému lichobežníku možno opísať kružnicu a žiadnemu inému lichobežníku kružnicu opísať nemožno.
- N3. V rovnoramennom lichobežníku  $ABCD$  platí  $|BC| = |CD| = |DA|$  a  $|\angle DAB| = |\angle ABC| = 36^\circ$ . Na základni  $AB$  je daný bod  $K$  tak, že  $|AK| = |AD|$ . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi  $AKD$  a  $KBC$  majú vonkajší dotyk. [53-B-I-2]
- N4. Nech  $ABCD$  je lichobežník s ostrými uhlami pri základni  $AB$ . Nech  $E$  je taký bod základne  $AB$ , že kružnice opísané trojuholníkmi  $AED$  a  $EBC$  sa dotýkajú zvonku. Dokážte, že bod  $E$  leží na kružnici opísanej trojuholníku  $CDV$ , kde  $V$  je priesečník priamok  $AD$  a  $BC$ . [53-B-S-3]
- N5. Daný je rovnobežník  $ABCD$  s tupým uhlom  $ABC$ . Na jeho uhlopriečke  $AC$  v polovine  $BDC$  zvolme bod  $P$  tak, aby platilo  $|\angle BPD| = |\angle ABC|$ . Dokážte, že priamka  $CD$  je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku  $BPC$  práve vtedy, keď úsečky  $AB$  a  $BD$  sú zhodné. [59-A-II-2]

4. Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel  $a, b, c$ , pre ktoré platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(Patrik Bak)

**Riešenie.** Ľavú stranu danej rovnice najskôr upravíme

$$\begin{aligned} a + ab + abc + ac + c &= a(1 + b) + ac(1 + b) + c = a(1 + b)(1 + c) + c = \\ &= a(1 + b)(1 + c) + (1 + c) - 1 = (1 + c)(a(1 + b) + 1) - 1, \end{aligned}$$

vďaka čomu dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$(1 + c)(a(1 + b) + 1) = 2018.$$

Číslo 2018 sa dá napísať ako súčin dvoch čísel dvoma spôsobmi:  $1 \cdot 2018$  alebo  $2 \cdot 1009$ . Keďže je  $1 + c \geq 2$  a  $a(1 + b) + 1 \geq 3$ , môže byť jedine  $1 + c = 2$  a  $a(1 + b) + 1 = 1009$ , čiže  $c = 1$  a  $a(1 + b) = 1008$ . V každej vyhovujúcej trojici  $(a, b, c)$  je tak  $c = 1$ , a preto vlastne hľadáme počet dvojíc  $(a, b)$  spĺňajúcich rovnicu z konca predchádzajúcej vety.

Číslo  $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ , ktoré sa má rovnať  $a(1 + b)$ , má  $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$  rôznych deliteľov vrátane jednotky a seba. Keďže  $1 + b \geq 2$ , nemôže byť  $a = 1008$ . Pre každý iný z 29 deliteľov  $a$  čísla 1008 dostaneme jednu dvojicu riešenia  $(a, b)$ .

*Odpoveď.* Hľadaný počet trojíc je rovný 29.

**NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:**

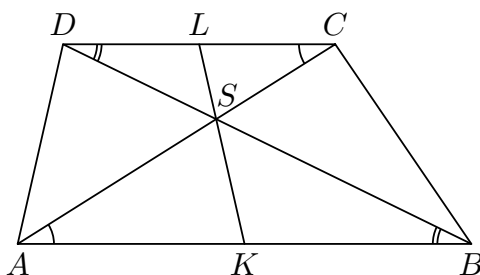
- N1. Určte počet deliteľov čísla 2016. [ $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$  deliteľov]
- N2. Určte všetky dvojice prirodzených čísel  $a, b$ , pre ktoré platí  $a + ab + b = 2017$ . [ $(a, b) = (1, 1008)$ ,  $(a, b) = (1008, 1)$ ]
- N3. Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel  $a, b$ , pre ktoré platí  $a^2 + b + 2 = a + b^2$ . [59-C-S-3,  $(a, b) = (1, 2)$ ,  $(a, b) = (0, 2)$ ]
- N4. Nájdite všetky trojice celých čísel  $x, y, z$ , pre ktoré platí

$$x + yz = 2005, \quad y + xz = 2006.$$

$$[54-C-S-1, (x, y, z) = (669, 668, 2), (x, y, z) = (2005, 2006, 0)]$$

5. Daný je lichobežník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Uvažujme obe priamky, z ktorých každá delí daný lichobežník na dve časti s rovnakým obsahom a je pritom rovnobežná s jeho uhlopriečkou  $AC$ , resp.  $BD$ . Dokážte, že priesečník týchto dvoch priamok leží na úsečke, ktorá spája stredy oboch základní  $AB$  a  $CD$ . (Jaromír Šimša)

**Riešenie.** Najskôr ukážeme, že priesečník  $S$  uhlopriečok  $AC$ ,  $BD$  leží na spojnici stredy  $K$  základne  $AB$  a stredy  $L$  základne  $CD$ . Zo zhodnosti vyznačených striedavých uhlov na obr. 2 vyplýva podobnosť trojuholníkov  $ABS \sim CDS$  (veta  $uu$ ), čo zaručuje podobnosť aj ich „polovic“, trojuholníkov  $AKS$  a  $CLS$  (podľa vety  $sus$ , pretože v prv uvedenej podobnosti si zodpovedajú nielen strany  $AS$  a  $CS$ , ale aj prislúchajúce polovice strán  $AB$  a  $CD$ ). Z toho dostávame zhodnosť uhlov  $ASK$  a  $CSL$ , na jednej priamke teda ležia nielen ich prvé, ale aj druhé ramená, čiže  $S \in KL$ , ako sme sľúbili ukázať.



Obr. 2

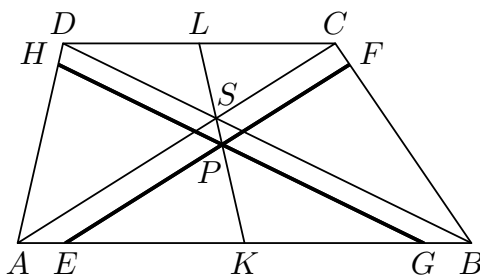
Predpokladajme, že  $|AB| > |CD|$  (inak zmeníme označenie vrcholov). Z porovnania strán a výšok trojuholníkov pre ich obsahy dostávame

$$S_{ABC} = S_{ABD} > S_{CDA} = S_{CDB}.$$

Preto uvažovaná rovnobežka s  $AC$  pretína trojuholník  $ABC$  (a nie  $ACD$ ), teda jeho strany  $AB$  a  $BC$  v bodoch, ktoré označíme postupne  $E$  a  $F$ . Keďže

$$S_{EBF} = \frac{1}{2}S_{ABCD} > \frac{1}{2}S_{ABC},$$

leží bod  $E$  na strane  $AB$  zaručene v jej „prvej polovici“  $AK$ . Podobne skúmaná rovnobežka s  $BD$  pretína strany  $AB$  a  $AD$  v bodoch, ktoré označíme  $G$  a  $H$ , pričom bod  $G$  leží na strane  $AB$  medzi bodmi  $K$  a  $B$  (obr. 3). Priesečník  $P$  priamok  $EF$  a  $GH$  teda leží v trojuholníku  $ABS$  a podľa vety  $uu$  platí  $\triangle ABS \sim \triangle EGP$ .



Obr. 3

Ešte dokážeme, že bod  $K$  je stredom strany  $EG$  trojuholníka  $EGP$ . Potom už bude totiž jednoduché ukázať, že bod  $P$  leží na úsečke  $KS$ .

Všimnime si, že v podobnostiach  $\triangle ABC \sim \triangle EBF$  a  $\triangle ABD \sim \triangle AGH$  majú oba trojuholníky  $ABC$  a  $ABD$  rovnaký obsah. Obsahy trojuholníkov  $EBF$  a  $AGH$  sú tiež rovnaké (rovné polovici obsahu daného lichobežníka  $ABCD$ ), takže obe podobnosti majú rovnaký koeficient, čiže  $|EB|/|AB| = |AG|/|AB|$ . Platí tak  $|EB| = |AG|$ , čiže  $|EK| + |KB| = |AK| + |KG|$ , odkiaľ vďaka  $|KB| = |AK|$  vyplýva  $|EK| = |KG|$ .

Bod  $K$  je teda spoločným stredom úsečiek  $AB$  a  $EG$ . Z podobnosti trojuholníkov  $ABS$  a  $EGP$  tak vyplýva aj podobnosť trojuholníkov  $SAK$  a  $PEK$  (rovnakú úvahu sme urobili pre inú dvojicu trojuholníkov už na začiatku riešenia). Jej dôsledkom je zhodnosť uhlov  $ASK$  a  $EPK$ , z ktorej ale vyplýva  $SK \parallel PK$ , takže bod  $P$  musí nutne ležať na úsečke  $SK$ . Leží teda aj na spojnici  $KL$ , čo sme mali dokázať.

*Poznámka.* Riešitelia budú koeficienty podobností z posledného odseku riešenia zrejme vyjadrovať cez obsahy trojuholníkov vyjadrené vzorcami

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{av}{2}, \quad S_{EBF} = S_{AGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{(a+c)v}{4},$$

pričom  $a$ ,  $c$  a  $v$  sú dĺžky základní a výšky daného lichobežníka.

Alebo sa dá pracovať so vzdialenosťami bodov od priamok a ukázať, že platí

$$\frac{d(P, AS)}{d(P, BS)} = \frac{d(K, AS)}{d(K, BS)}.$$

(Polpriamka  $SK$  je množinou všetkých tých bodov uhla  $ASB$ , ktoré majú od jeho ramien rovnaký pomer vzdialeností ako bod  $K$ .) Ak označíme  $k$  spoločný koeficient oboch podobností  $\triangle ABC \sim \triangle EBF$  a  $\triangle ABD \sim \triangle AGH$ , dostaneme

$$\frac{d(P, AS)}{d(P, BS)} = \frac{d(B, AC) - d(B, EF)}{d(A, BD) - d(A, GH)} = \frac{(1-k)d(B, AC)}{(1-k)d(A, BD)} = \frac{d(B, AC)}{d(A, BD)},$$

avšak  $d(B, AC) = 2d(K, AS)$  a  $d(A, BD) = 2d(K, BS)$ , čím je dôkaz ukončený.

#### NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Daný je lichobežník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Dokážte, že štyri body, a to stredy základní lichobežníka, priesečník jeho uhlopriečok a priesečník priamok oboch ramien lichobežníka, ležia na jednej priamke.
- N2. Daný je lichobežník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ),  $S$  označuje priesečník jeho uhlopriečok. Dokážte, že obsahy trojuholníkov  $BCS$  a  $ADS$  sú rovnaké.
- N3. Je daný lichobežník  $ABCD$ . Stred základne  $AB$  označme  $P$ . Uvažujme rovnobežku so základňou  $AB$ , ktorá pretína úsečky  $AD$ ,  $PD$ ,  $PC$ ,  $BC$  postupne v bodoch  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ .
  - a) Dokážte, že  $|KL| = |MN|$ .
  - b) Určte polohu priamky  $KL$  tak, aby platilo aj  $|KL| = |LM|$ .
- N4. Vnútri obdĺžnika  $ABCD$  ležia body  $X$  a  $Y$  tak, že celý obdĺžnik je rozdelený na dva trojuholníky  $ADX$ ,  $BCX$  s rovnakým obsahom a dva konvexné štvoruholníky  $ABYX$  a  $CDXY$  taktiež s rovnakým obsahom. Dokážte, že potom úsečka  $XY$  prechádza stredom obdĺžnika. [43-C-II-3]
- N5. Na strane  $BC$ , resp.  $CD$  rovnobežníka  $ABCD$  určte body  $E$ , resp.  $F$  tak, aby úsečky  $EF$ ,  $BD$  boli rovnobežné a trojuholníky  $ABE$ ,  $AEF$  a  $AFD$  mali rovnaké obsahy. [58-B-I-3]

---

**6.** *Nájdite najväčší možný počet čísel, ktoré možno vybrať z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  tak, aby medzi nimi neboli žiadne dve, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5.* (Pavel Calábek)

**Riešenie.** Najskôr ukážeme, že z ľubovoľných siedmich po sebe idúcich čísel, označme ich

$$a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6,$$

možno požadovaným spôsobom vybrať nanejvýš tri čísla. Za tým účelom všetkých sedem čísel rozdelíme do troch množín

$$A = \{a, a + 2, a + 5\}, \quad B = \{a + 1, a + 3\}, \quad C = \{a + 4, a + 6\}.$$

Keďže z množiny  $A$  môžeme vybrať nanejvýš dve čísla a z každej z množín  $B$  a  $C$  nanejvýš po jednom čísle, stačí len vylúčiť prípad, že z množiny  $A$  sú vybrané dve čísla (nutne  $a + 2$  a  $a + 5$ ) a súčasne z množín  $B$  a  $C$  je vybrané po jednom čísle. Vtedy kvôli číslu  $a + 2$  je z  $C$  nutne vybrané číslo  $a + 6$  a kvôli číslu  $a + 5$  je z  $B$  vybrané číslo  $a + 1$ . Súčasný výber čísel  $a + 1, a + 6$  však možný nie je.

Pomocou dokázanej vlastnosti teraz ľahko vysvetlíme, prečo zo všetkých 100 daných čísel od 1 po 100, ktoré máme podľa zadania k dispozícii, nemožno požadovaným spôsobom vybrať viac ako 44 čísel. Za tým účelom zo všetkých 100 čísel zostavíme 14 disjunktných sedmíc po sebe idúcich čísel

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \quad \dots, \quad \{92, 93, 94, 95, 96, 97, 98\}, \quad (1)$$

do ktorých sme nezahrnuli iba dve najväčšie čísla 99 a 100. Ako sme ukázali, z každej vypísanej sedmice možno vybrať nanejvýš tri čísla, preto počet všetkých vybraných čísel naozaj nikdy neprevyší číslo  $14 \cdot 3 + 2 = 44$ .

V poslednej časti riešenia ukážeme, že výber 44 čísel je možný a že je pritom jediný (aj keď to dokázať zadanie úlohy nevyžaduje). Predpokladajme teda, že máme ľubovoľný vyhovujúci výber 44 čísel. Podľa predchádzajúceho odseku vieme, že medzi vybranými musia byť dvojice čísel 99 a 100. Ak pozmeníme zostavu 14 disjunktných sedmíc na

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}, \quad \dots, \quad \{94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}, \quad (2)$$

dôjdeme k záveru, že medzi vybranými musia tiež byť čísla 1 a 2. Je jasné, že použitím iných zostáv 14 sedmíc, zložených vždy z niekoľkých prvých sedmíc z (1) a niekoľkých posledných sedmíc z (2), odvodíme, že medzi vybranými číslami musia byť aj dvojice 8 a 9, 15 a 16,  $\dots$ , 92 a 93, spolu teda všetkých 15 dvojíc susedných čísel, ktoré po delení siedmimi dávajú zvyšky 1 a 2.

Čo možno ďalej usúdiť o zvyšných  $44 - 30 = 14$  vybraných číslach? Vďaka dokázanej vlastnosti vieme, že to musia byť čísla po jednom vybrané zo 14 sedmíc (1); keďže v každej z týchto sedmíc sú určite vybrané dve najmenšie čísla, tretie vybrané číslo zrejme musí byť to, ktoré je v sedmici piate najmenšie.

Dokázali sme, že každý vyhovujúci výber 44 čísel musí vyzeráť takto:

$$\{1, 2, 5\} \cup \{8, 9, 12\} \cup \{15, 16, 19\} \cup \dots \cup \{92, 93, 96\} \cup \{99, 100\}.$$

Že tento výber, zložený zo 14 trojíc a jednej dvojice, je naozaj vyhovujúci, vysvetlíme ľahko: dve čísla z rovnakej skupiny sa líšia o 1, 3 alebo 4, rozdiel každých dvoch čísel ležiacich v susedných skupinách je jedno z čísel 3, 4, 6, 7, 8, 10 či 11; čísla z nesusedných skupín majú rozdiely aspoň 10.

## NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Daná je množina čísel  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Nájdite všetky jej podmnožiny s najväčším možným počtom prvkov, aby medzi nimi neboli žiadne dve čísla, ktoré sa líšia o 2 alebo o 5.  $[\{1, 2, 5, 8, 9\}, \{2, 3, 6, 9, 10\}]$
- N2. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla  $n \geq 2$  je možné z množiny  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom  $n$ . [54-C-I-2]
- N3. Pre ktoré prirodzené čísla  $n$  možno z množiny  $\{n, n+1, n+2, \dots, n^2\}$  vybrať štyri navzájom rôzne čísla  $a, b, c, d$  tak, aby platilo  $ab = cd$ ? [54-C-S-2]
- N4. Z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$  vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. [58-C-I-5]
- N5. Z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$  je vybraných niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.
- Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.
  - Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26.

[58-C-II-3]

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:                   Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti:            Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava:     Peter Novotný, Ján Mazák

Vydal:                   IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017