

## 67. ročník Matematickej olympiády, 2017/2018

### Úlohy krajského kola kategórie A

1. Pavol striedavo vpisuje krížiky a krúžky do políčok tabuľky (začína krížikom). Keď je tabuľka celá vyplnená, výsledné skóre spočíta ako rozdiel  $X - O$ , pričom  $X$  je súčet druhých mocnín počtov krížikov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch a  $O$  je súčet druhých mocnín počtov krúžkov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch. Určte všetky možné hodnoty skóre dosiahnuteľné pre tabuľku  $67 \times 67$ .
2. Daná je polkružnica  $k$  nad priemerom  $PQ$ . Na nej je zostrojená tetiva  $BC$  pevnej dĺžky  $d$ , ktorej krajné body sú rôzne od bodov  $P, Q$ . Lúč vyslaný z bodu  $B$  sa od priemeru  $PQ$  odrazí do bodu  $C$  v takom bode  $A$ , že  $|\angle PAB| = |\angle QAC|$ . Dokážte, že veľkosť uhla  $BAC$  nezávisí od polohy tetivy  $BC$  na polkružnici.
3. Sú dané dve rôzne kladné reálne čísla  $a, b$ . Uvažujme rovnicu

$$\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor bx + a \rfloor,$$

pričom  $\lfloor y \rfloor$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje  $y$ . Dokážte, že existuje interval dĺžky aspoň

$$\frac{1}{\max\{a, b\}},$$

ktorého všetky body sú riešeniami danej rovnice.

4. Rozhodnite, či existujú kladné celé čísla  $n$  a  $k$  také, že

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla.

Krajské kolo kategórie A sa koná

**v utorok 16. januára 2018**

tak, aby začalo dopoludnia najneskôr o 10:00 a aby súťažiaci mali na riešenie úloh 4 hodiny čistého času. Za každú úlohu môže súťažiaci získať 6 bodov. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály. Tieto údaje sa žiakom oznámia pred začiatkom súťaže.

Riešenia úloh budú v deň súťaže od 14:00 dostupné na internetových adresách [www.olympiady.sk](http://www.olympiady.sk) a [skmo.sk](http://skmo.sk).

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Vojtech Bálint

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017