

67. ročník Matematickej olympiády, 2017/2018
Úlohy krajského kola kategórie A (maďarská verzia)

1. Pali egy táblázat mezőibe felváltva ír karikát és keresztet (kereszttel kezd). Amikor az egész táblázat ki van töltve, akkor a végeredményt az $X - O$ képlet alapján számolja ki, ahol X az egyes sorokban és oszlopokban levő keresztek számának négyzetösszege, O az egyes sorokban és oszlopokban levő karikák számának négyzetösszege. (Négyzetösszeg alatt az adott számok négyzeteinek összegét értjük.) Határozd meg az összes lehetséges végeredményt, amely egy 67×67 -es táblázatban előállhat!
2. Adott a PQ átmérő feletti k félkörvonal. Felvettünk rajta egy rögzített d hosszúságú BC húrt úgy, hogy a végpontjai különbözzenek a P és Q pontoktól. A B pontból küldött fénysugár a PQ átmérő egy olyan A pontjából verődik vissza a C pontba, amelyre $|\angle PAB| = |\angle QAC|$. Bizonyítsd be, hogy a BAC szög nagysága nem függ a BC húr helyzetétől!
3. Adottak az egymástól különböző a és b pozitív valós számok. Tekintsük az

$$\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor bx + a \rfloor$$

egyenletet, ahol $\lfloor y \rfloor$ azt a legnagyobb egész számot jelöli, amely nem nagyobb y -nál. Bizonyítsd be, hogy létezik egy legalább

$$\frac{1}{\max\{a, b\}}$$

hosszúságú intervallum, amelynek minden pontja megoldása az adott egyenletnek!

4. Döntsd el, hogy léteznek-e olyan n és k természetes számok, amelyekre az

$$\frac{n}{11^k - n}$$

tört értéke négyzetszám!

Az **A** kategória kerületi fordulójára

2018. január 16-án (kedden)

délelőtt kell sort keríteni úgy, hogy legkésőbb 10 órakor kezdődjön és a versenyzőknek a feladatok megoldására 4 óra álljon a rendelkezésükre. A versenyző mindegyik feladatért 6 pontot szerezhet. Sikeres megoldónak nyilvánul az a versenyző, aki 10 vagy több pontot szerez. A verseny folyamán tilos a számológépek és egyéb más elektronikus segédeszközök, valamint bármilyen írásos jegyzetek használata. Ezeket a feltételeket a verseny kezdete előtt kell a versenyzők tudomására hozni.

A feladatok megoldásai a verseny napján 14 órától megtekinthetők lesznek a következő weboldalakon: www.olympiady.sk és skmo.sk.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Preklad: Vojtech Bálint, Štefan Gyürki

Redakčná úprava: Peter Novotný, Vojtech Bálint

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017