SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

68. ročník, školský rok 2018/2019

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 68. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **3. decembra 2018** (kategória **A**) a do **21. januára 2019** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2019 v Spojenom kráľovstve), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2019 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude na prelome augusta a septembra 2019 v ČR).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2019 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 68. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	11. 12. 2018	15. 01. 2019	24. – 27. marca 2019
Kategórie B, C	29. 01. 2019	02. 04. 2019	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2018/2019
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár iKS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o iKS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatról tudjuk, hogy minden természetes n számra fennáll:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Keresd meg az a_1 összes olyan értékét, amelyre ez a sorozat konstans.

b) Legyen $a_1 = 5$. Határozd meg azt a legnagyobb egész számot, amely nem lépi túl az a_{2018} értékét!

(*Vojtech Bálint*)

A – I – 2

Adott a hegyesszögű ABC háromszög. Jelölje D az A csúcsból húzott magasságvonal talppontját, a D pont AB, ill. AC tengelyek szerinti tükörképét jelölje D_1, ill. D_2. Továbbá, jelölje E_1 és E_2 a BC egyenes azon pontjait, amelyekre $D_1E_1 \parallel AB$ és $D_2E_2 \parallel AC$. Bizonyítsd be, hogy a D_1, D_2, E_1, E_2 pontok egy körvonalra illeszkednek, s ennek középpontja az ABC háromszög köréírt körére illeszkedik! (*Patrik Bak*)

A – I – 3

Keresd meg az összes olyan nemnegatív m, n egész számot, amelyre $|4m^2 - n^{n+1}| \leqq 3$.

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 4

Adott az n-elemű természetes számokból álló M halmaz, ahol n egytől nagyobb páratlan szám. Bizonyítsd be, hogy azon különböző számokból álló rendezett (p, q) számpárok száma, amelyre p, q és a számtani közepük is az M halmaz elemei, legfeljebb $\frac{1}{2}(n-1)^2$.

(*Martin Panák, Patrik Bak*)

A – I – 5

Szerkeszd meg az ABC háromszöget, ha ismered az o kerületét, a BC oldalához írt körvonal ρ sugarát és ugyanehhez oldalhoz tartozó v magasságot. Végezd el a diszkussziót az adott hosszúságok ismeretében! (*Patrik Bak*)

A – I – 6

Egy játéktáblára felrajzoltunk egy szabályos n-szöget, melynek az egyik csúcsa csapdaként van megjelölve. Tom és Jerry a következő játékot játssza. A játék elején Jerry felrak egy bábut az n-szög valamelyik csúcsába. Ezek után Tom minden lépésben mond egy természetes számot és Jerry ennyi csúccsal odébbtolja a bábut a saját döntése alapján kiválasztott irányba: vagy az óramutató járásával megegyező, vagy az azzal ellentétes irányba. Keresd meg az $n \geqq 3$ összes olyan értékét, amelyre Jerry tud úgy lépni a bábuval, hogy az soha ne kerüljön bele a csapdába. Hogyan változik meg a válaszod, ha tudod, hogy Tom a táblához háttal áll, tehát ismeri az n értékét, de nem látja, hogy hová állította Jerry a bábut az elején és azt sem látja, hogy melyik irányba mozog vele az egyes lépésekben. (*Pavel Calábek*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Keresd meg az összes olyan nyolcjegyű számot, amelyből négy szomszédos számjegyet elhagyva olyan négyjegyű számot kapunk, amely az eredetinél 2019-szer kisebb! (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Egy derékszögű ABC háromszögben, melynek derékszöge az A csúcsnál van, fennáll, hogy $|AB| = 4$ és $|AC| = 3$. Jelölje M a BC átfogó középpontját, N pedig a B csúcsnál levő belső szög tengelyének metszéspontját az AC befogóval. Az AM és BN szakaszok egy pontban metszik egymást, jelöljük ezt K-val. Számítsd ki a BAK háromszög és $CNKM$ négyszög területeinek arányát! (*Patrik Bak*)

B – I – 3

Egy természetes szám *átalakításán* a következő műveletet értjük: ha a szám páros, akkor elosztjuk kettővel, ha viszont páratlan, akkor hozzáadunk 1-et.

a) Bizonyítsd be, hogy bármely természetes számból néhány átalakítás után 1-et kapunk!
b) Melyik az a szám az 1, 2, ..., 10^6 közül, amelyik esetén a legtöbb lépésre lesz szükségünk míg megkapjuk az 1-et?

(*Ján Mazák*)

B – I – 4

A nemnegatív a, b valós számokra $a^2 + b^2 = 1$. Határozd meg a

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

kifejezés lehető legkisebb és legnagyobb értékét! (*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

B – I – 5

Adott a konvex $ABCD$ négyszög, amelyben $AD \perp BD$. Jelölje M az átlók metszéspontját, ennek merőleges vetülete az AB egyenesre legyen P, a B pont AC egyenesre vetített merőleges vetülete pedig legyen Q. Bizonyítsd be, hogy az M pont egybeesik a PQD háromszög beírt körének középpontjával! (*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

B – I – 6

A természetes számok egy véges halmazát *szépnek* nevezünk, ha az elemeinek tízes számrendszerbeli felírásához minden benne szereplő számjegyet páros sokszor kell felhasználnunk. Szép halmazok például a $\{11, 13, 31\}$, $\{10, 100, 110\}$, de szintén az üres halmaz is. Határozd meg hány szép részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ halmaznak! (*Patrik Bak*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Egy ismeretlen szám a $\{6, 15, 20, 21, 70\}$ halmaz elemei közül pontosan négy különbözővel osztható. Határozd meg melyik néggyel! (*Michal Rolínek*)

C – I – 2

Az ABC háromszög AB oldalán adottak a D és E pontok úgy, hogy $|AD| = |DE| = |EB|$. Az A és B pontok rendre a CF és CG szakaszok középpontjai. A CD egyenes az FB egyenest az I pontban metszi, a CE egyenes az AG egyenest a J pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy az AI és BJ egyenesek metszéspontja az FG egyenesre illeszkedik! (*Pavel Calábek*)

C – I – 3

Adottak a pozitív valós a, b, c számok, melyek összege 3, és mindegyik értéke legfeljebb 2. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(*Patrik Bak*)

C – I – 4

Egy 2×13-as táblázat minden mezejét befestünk pontosan eggyel a négy szín közül. Hányféle képpen tudjuk ezt megcsinálni úgy, hogy a szomszédos mezők ne legyenek egyforma színűek? (Szomszédosnak azokat a mezőket tekintjük, amelyeknek van közös oldaluk.)

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 5

Az adott konvex $ABCDEFGH$ nyolcszög A, B, C, D, E, F, G, H csúcsainál fekvő belső szögei rendre α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω és fennáll:

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Az AD, CF, EH, GB átlók középpontjait jelölje rendre K, L, M, N. Bizonyítsd be, hogy a KM és LN egyenesek egymásra merőlegesek! (*Josef Tkadlec*)

C – I – 6

Keresd meg az összes olyan háromjegyű n számot, amelynek számjegyei nullától különbözőek és igaz rá, hogy osztható azon három darab kétjegyű szám összegével, amelyek az egyes számjegyek elhagyásával keletkeznek belőle! (*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

68. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Martin Panák, PhD., Mgr. Michal Rolínek, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Josef Tkadlec
Recenzenti:	Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Redakčná úprava:	RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018