70. ročník Matematickej olympiády
2020/2021

Riešenia úloh školského kola kategórie C

---

1. *Určte všetky dvojice* (m, n) *prirodzených čísel, pre ktoré platí*

$$2m + 2s(n) = n \cdot s(m) = 70,$$

pričom $s(a)$ *označuje ciferný súčet prirodzeného čísla* a. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Z rovnice $2m+2s(n) = 70$ upravenej na $m+s(n) = 35$ vyplýva, že $m < 35$, a teda $s(m) \leqq 11$ (rovnosť nastane pre $m = 29$). Podľa rovnice $n \cdot s(m) = 70$ je preto číslo $s(m)$ deliteľom čísla 70, ktorý je nanajvýš rovný 11, takže $s(m) \in \{1, 2, 5, 7, 10\}$.

Teraz pre každú z hodnôt $s(m)$ rovnú 1, 2, 5, 7, 10 dopočítame postupne hodnoty $n = 70/s(m)$, $s(n)$, $m = 35 - s(n)$ a zapíšeme ich do nasledujúcej tabuľky:

$s(m)$	1	2	5	7	10
n	70	35	14	**10**	**7**
$s(n)$	7	8	5	1	7
m	28	27	30	**34**	**28**

Čísla z každého stĺpca síce spĺňajú obe zadané rovnice, nie je však zaručené, že $s(m)$ je naozaj ciferný súčet čísla m. Vidíme, že prvé tri prípady, keď $s(m) \in \{1, 2, 5\}$, nevedú k žiadnemu riešeniu, lebo $s(28) \neq 1$, $s(27) \neq 2$ a $s(30) \neq 5$. Zvyšné dva prípady, keď $s(m) = 7$ a $s(m) = 10$, vedú ku dvom riešeniam danej úlohy, keďže $s(34) = 7$ a $s(28) = 10$. Zodpovedajúce m a n sú v tabuľke vytlačené tučne.

Záver. Daná úloha má práve dve riešenia, ktorými sú dvojice $(m, n) = (34, 10)$ a $(m, n) = (28, 7)$.

Poznámka. Ak nerovnosť $s(m) \leqq 11$ vopred neodvodíme, môžeme úlohu vyriešiť postupom z uvedeného riešenia, keď pritom dotyčnú tabuľku rozšírime o stĺpce pre hodnoty $s(m) \in \{14, 35, 70\}$, t. j. zvyšné tri delitele čísla 70:

$s(m)$	14	35	70
n	5	2	1
$s(n)$	5	2	1
m	30	33	34

Tieto možnosti vylučujú nerovnosti $s(30) \neq 14$, $s(33) \neq 35$ a $s(34) \neq 70$.

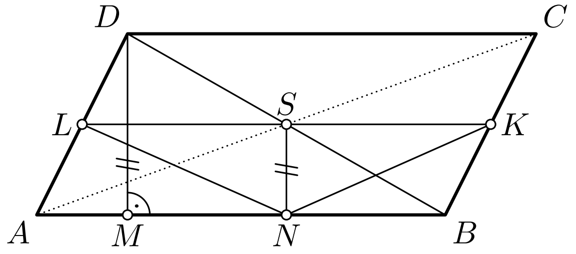
Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 2 body za uvedenie všetkých (vopred nevylúčených) možností pre hodnoty $s(m)$ a n z rozkladu $70 = n \cdot s(m)$, 3 body za vylúčenie všetkých nevyhovujúcich možností; 1 bod za nájdenie a overenie oboch riešení vrátane uvedenia správnej odpovede.

Len za uhádnutie oboch vyhovujúcich dvojíc dajte 1 bod.

2. *Daný je rovnobežník $ABCD$, v ktorom K, L sú postupne stredy strán BC, AD. Nech päta M kolmice z bodu D na priamku AB leží vnútri strany AB daného rovnobežníka a nech N je stred úsečky MB. Dokážte, že $|NK| = |NL|$.* (*Vojtěch Zlámal*)

Riešenie. Označme S priesečník uhlopriečok daného rovnobežníka $ABCD$, t. j. ich spoločný stred. Bod S je tiež stredom priečky KL, ktorá je navyše rovnobežná so stranou AB.[1]

Všimnime si, že v pravouhlom trojuholníku BDM je bod S stredom prepony BD a bod N je stredom odvesny MB (obr. 1). Úsečka SN je teda jeho stredná priečka rovnobežná s odvesnou DM, takže platí nielen $DM \perp AB$, ale aj $SN \perp AB$.



Obr. 1

Teraz zo vzťahov $KL \parallel AB$ a $SN \perp AB$ dostávame $SN \perp KL$. Priamka SN kolmá na úsečku KL prechádza jej stredom S, takže je to jej os. Z toho už vyplýva $|NK| = |NL|$, ako sme mali dokázať. (Dodajme, že sme spravenú úvahu mohli zapísať ako úvahu o výške NS trojuholníka KLN, ktorý je v jej dôsledku rovnoramenný.)

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 2 body za zistenie, že úsečka SN je strednou priečkou trojuholníka BDM; 2 body za dôkaz $SN \perp KL$; 1 bod za zdôvodnenie, že priamka NS je os úsečky KL (prípadne úsečka NS je výška k základni KL rovnoramenného trojuholníka KLN); 1 bod za z toho vyplývajúci potrebný záver.

3. *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $ab+bc+ca = 1$. Určte, aké hodnoty nadobúda výraz*

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

(*Josef Tkadlec, Patrik Bak*)

Riešenie. Vzhľadom na podmienku $ab + bc + ca = 1$ upravíme (podobne ako v úlohe 4 z domáceho kola) najskôr prvý z troch sčítancov skúmaného výrazu

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} = \frac{a(b^2+ab+bc+ca)}{a+b} = \frac{a(b+a)(b+c)}{a+b} = a(b+c) = ab+ca.$$

Analogicky zvyšné dva sčítance majú vyjadrenia

$$\frac{b(c^2+1)}{b+c} = bc+ab \quad \text{a} \quad \frac{c(a^2+1)}{c+a} = ca+bc.$$

[1] Tieto známe poznatky nie je nutné v riešení dokazovať. Napriek tomu uveďme, že vyplývajú z vlastností stredných priečok SK a LS v trojuholníkoch ABC a ABD.

Dokopy tak pre súčet všetkých troch zadaných zlomkov dostávame

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b}+\frac{b(c^2+1)}{b+c}+\frac{c(a^2+1)}{c+a}=(ab+ca)+(bc+ab)+(ca+bc)=2(ab+bc+ca)=2,$$

pričom sme opäť využili rovnosť $ab+bc+ca=1$ zo zadania úlohy.

Záver. Daný výraz nadobúda pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c, ktoré spĺňajú podmienku $ab+bc+ca=1$, vždy hodnotu 2.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho: 3 body za potrebnú úpravu ktoréhokoľvek z troch sčítancov daného výrazu; 2 body za sčítanie troch upravených sčítancov (zlomkov); 1 bod za uvedenie správnej odpovede.

Za nedokázanú hypotézu o jedinej hodnote 2 daného výrazu dajte 1 bod, aj keď je podporená konkrétnymi numerickými výpočtami.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KST FRI UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Ján Brajerčík, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021