MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1

N1 Je možné tabuľku 5×5 vyplniť celými číslami tak, aby súčet čísel v každom riadku bol nepárny a súčet čísel v každom stĺpci párny?

N2 Pre ktoré n také, že $n \leq 8$, je možné tabuľku $n \times n$ vyplniť spôsobom popísaným v súťažnej úlohe?

N3 Pre ktoré d z $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vyfarbiť niekoľko políčok tabuľky 6×6 tak, aby v každom riadku aj každom stĺpci bolo práve d vyfarbených políčok?

D1 Udajte príklad vyplnenia tabuľky 71×71, ktoré vyhovuje zadaniu súťažnej úlohy.

D2 Dokážte, že tabuľku $n \times n$ je možné vyplniť spôsobom popísaným v súťažnej úlohe pre každé n také, že $n \geq 18$.

D3 Je možné ofarbiť políčka nekonečnej štvorcovej siete čiernou a bielou farbou tak, aby v každom riadku bolo len konečne veľa políčok čiernych a v každom stĺpci len konečne veľa políčok bielych?

2

N1 Dokážte, že dotyčnice vedené z bodu A ku kružnici so stredom O sú súmerne združené podľa priamky OA.

N2 Dokážte, že v ľubovoľnom lichobežníku je spojnica stredov jeho ramien rovnobežná s jeho základňami.

D1 Uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ so základňami AB, CD sa pretínajú v bode P a priamky AD, BC v bode Q. Dokážte, že stredy základní AB, CD ležia na priamke PQ.

D2 V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD označme P priesečník osí vonkajších uhlov pri vrcholoch A, D a podobne Q priesečník osí vonkajších uhlov pri vrcholoch B, C. Dokážte, že dĺžka úsečky PQ je rovná polovici obvodu $ABCD$.

D3 Je daný konvexný päťuholník $ABCDE$ taký, že trojuholníky ABC, BCD, CDE, DEA majú všetky rovnaký obsah. Úsečky AC, AD pretnú úsečku BE postupne v bodoch M, N. Dokážte, že $|BM| = |NE|$.

D4 V dotyčnicovom štvoruholníku $ABCD$ označme P priesečník polpriamok AD a BC, ďalej Q priesečník polpriamok BA a CD a napokon R kolmý priemet bodu D na priamku PQ. Dokážte, že kružnice vpísané trojuholníkom ADQ a CDP vidieť z bodu R pod rovnakým uhlom.

3

N1 Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že $75 \cdot n$ je tretia mocnina celého čísla.

N2 Nech k je celé číslo také, že $k \geq 2$. Dokážte, že ak v rovnosti $a \cdot b = c$ sú dve z troch zastúpených kladných celých čísel a, b, c rovné k-tým mocninám celých čísel, platí to isté aj pre tretie číslo.

N3 Dokážte, že pre všetky dostatočne veľké kladné celé čísla n platí:

- **a)** $n^2 > 10n + 100$.
- **b)** $2^n > 10n^2$.
- **c)** $3^n > 10 \cdot 2^n$.

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n, k väčšie než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buď celé, alebo iracionálne.

D2 Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla.

D3 Určte všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

D4 Pre ktoré dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$?

4

N1 Použite popísanú metódu na vyriešenie sústav v obore reálnych čísel:

- **a)** $3x + 2y = x^2$ a $2x + 3y = y^2$.
- **b)** $3xy - 10 = 2x^2$ a $2xy + 15 = 3y^2$.

N2 Ukážte, že z prvých dvoch rovníc sústavy zo súťažnej úlohy vyplýva, že obe čísla $z - x$ a $x + y + z$ sú rôzne od nuly. Aké sú obdobné dôsledky iných dvoch rovníc?

D1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

D2 V obore reálnych čísel riešte sústavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

D3 Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y} + z = 1,$$
$$\frac{1}{y+z} + x = 1,$$
$$\frac{1}{z+x} + y = 1.$$

D4 Navzájom rôzne reálne čísla a, b, c spĺňajú $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokážte, že $|abc| = 1$.

D5 Nájdite všetky reálne čísla x také, pre ktoré platí $x \geq 3$ a

$$x + \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = 5.$$

D6 Nájdite všetky celé čísla n také, že $n \geq 3$, pre ktoré existujú reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ také, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pre každé i z $\{1, 2, \ldots, n\}$.

5

N1 Dokážte *tvrdenie o Švrčkovom bode*:

V ľubovoľnom trojuholníku ABC prechádza os vnútorného uhla BAC stredom toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A.

N2 Dokážte *tvrdenie „o troch prstoch“*:

V danom trojuholníku ABC označme I stred kružnice doňho vpísanej a S stred toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A. Potom platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

N3 Dokážte, že v súťažnej úlohe je priamka S_bS_c osou úsečky AI.

N4 Dokážte *vetu o úsekovom uhle*:

Nech ABC je trojuholník vpísaný do kružnice k a T bod dotyčnice kružnice k v bode B v polrovine opačnej k polrovine BCA. Potom platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Uhol TBC je tzv. *úsekový uhol* prislúchajúci tomu oblúku BC kružnice k, ktorý neobsahuje bod A.)

D1 V situácii zo súťažnej úlohy označme ďalej S_a priesečník polpriamky AI s kružnicou k rôzny od A. Dokážte, že bod I je priesečníkom výšok trojuholníka $S_aS_bS_c$.

D2 Označme I stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Označme tiež M a N stredy úsečiek AB a BI. Dokážte, že priamka CI je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BMN.

D3 V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme postupne L, M stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný.

D4 Označme I stred kružnice vpísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Jeho vnútorný bod P spĺňa podmienku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokážte, že $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastane, práve keď $P = I$.

D5 Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch B, C ostrohuhlého trojuholníku ABC pretnú protiľahlé strany postupne v bodoch K, L. Označme M priesečník priamky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na priamke CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokážte, že $|NK| = |NB|$.

6

N1 Nájdite všetky kladné celé čísla t také, že čísla t, $2t - 1$ a $2t + 1$ sú všetky prvočísla.

N2 Sú dané reálne čísla d a q, pričom $q \notin \{0, 1\}$. Dokážte, že postupnosť $(x_0, x_1, \ldots)$ spĺňa pre každý index i rovnosť $x_{i+1} = qx_i + d$, práve keď je jej všeobecný člen tvaru $x_i = kq^i + c$, kde $c = d/(1-q)$ a k je ľubovoľná konštanta.

N3 Nech M je konečná množina, f je ľubovoľné zobrazenie také, že $f : M \to M$, a $m \in M$. Dokážte, že postupnosť $(m, f(m), f(f(m)), \dots)$ je od istého člena periodická. Ďalej dokážte, že ak zobrazenie f je prosté, tak táto postupnosť je periodická.

N4 Dokážte, že pre každé nepárne číslo d sa zvyšky čísel 2^0, 2^1, 2^2, … po delení číslom d periodicky opakujú.

N5 Dokážte *malú Fermatovu vetu*:

Pre ľubovoľné prvočíslo p a celé číslo a nesúdeliteľné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

D1 Dokážte, že každé kladné celé číslo má násobok, v ktorého desiatkovom zápise sa vyskytujú len nuly a jednotky.

D2 Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n existuje n-miestne číslo, ktoré je násobkom 5^n a ktorého všetky číslice sú nepárne.

D3 Dokážte, že každé kladné celé číslo má násobok, ktorý je kladným Fibonacciho číslom. (Fibonacciho postupnosť F je určená vzťahmi $\mathrm{F}(0) = 0$, $\mathrm{F}(1) = 1$ a $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pre každý index n.)

D4 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré dávajú po delení štyrmi zvyšok 3.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1

N1 Je možné tabuľku 5×5 vyplniť celými číslami tak, aby súčet čísel v každom riadku bol nepárny a súčet čísel v každom stĺpci párny?

Riešenie:

Nie je to možné. Pre spor predpokladajme opak a označme S súčet čísel v celej tabuľke. Sčítaním cez riadky je S rovné súčtu piatich nepárnych čísel, teda je nepárne. Sčítaním cez stĺpce je S rovné súčtu piatich párnych čísel, teda je párne.

N2 Pre ktoré n také, že $n \leq 8$, je možné tabuľku $n \times n$ vyplniť spôsobom popísaným v súťažnej úlohe?

Riešenie:

Iba pre $n = 5$ a $n = 7$.

V prípade $n \leq 6$ je súčet čísel v každom stĺpci najviac 12, takže kvôli deliteľnosti siedmimi musí byť rovný 7. Súčet čísel v celej tabuľke preto musí byť rovný $7n$, podľa súčtov čísel v riadkoch to však musí byť násobok piatich, takže nutne $n = 5$.

Ak $n = 5$, tak tri riadky vyplníme jednotkami, dva riadky dvojkami.

Ak $n = 7$, tak štyri stĺpce vyplníme jednotkami, tri stĺpce dvojkami.

V prípade $n = 8$ je súčet čísel v každom stĺpci v rozmedzí 8 až 16, takže kvôli deliteľnosti siedmimi musí byť rovný 14. Súčet všetkých čísel v tabuľke je potom $8 \cdot 14$, čo nie je násobok piatich, takže taký nie je ani súčet čísel v niektorom riadku.

N3 Pre ktoré d z $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vyfarbiť niekoľko políčok tabuľky 6×6 tak, aby v každom riadku aj každom stĺpci bolo práve d vyfarbených políčok?

Riešenie:

Pre každé také d.

Pre dané d je možné napríklad ofarbiť políčka, ktoré na obrázku obsahujú čísla najviac rovné d.

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

D1 Udajte príklad vyplnenia tabuľky 71×71, ktoré vyhovuje zadaniu súťažnej úlohy.

Riešenie:

Pretože číslo $69 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ čiže 140 je násobkom piatich i siedmich, vyhovuje každé vyplnenie, keď je v každom riadku i stĺpci 69 dvojok a 2 jednotky. Na to stačí tabuľku vyplniť „cyklicky“: do prvého riadku napísať $(1, 1, 2, 2, \dots, 2)$, do druhého $(2, 1, 1, 2, 2, \dots, 2)$ atď., až do posledného 71. riadku $(1, 2, 2, \dots, 2, 1)$.

D2 Dokážte, že tabuľku $n \times n$ je možné vyplniť spôsobom popísaným v súťažnej úlohe pre každé n také, že $n \geq 18$.

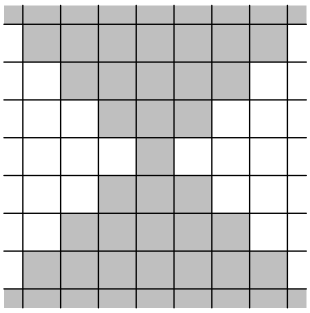
Riešenie:

Podmienka $n \geq 18$ zaručuje existenciu celého čísla s, ktoré je násobkom 35 a spĺňa nerovnosti $n \leq s \leq 2n$. Súčet čísel v každom riadku i stĺpci tabuľky $n \times n$ bude rovný danému číslu s, ak v každom riadku i stĺpci bude $2n - s$ jednotiek a $s - n$ dvojok. Dosiahneme to podobne ako v riešení úlohy D1, keď riadky tabuľky postupne vyplníme „cyklickými“ zmenami požadovanej zostavy jednotiek a dvojok.

D3 Je možné ofarbiť políčka nekonečnej štvorcovej siete čiernou a bielou farbou tak, aby v každom riadku bolo len konečne veľa políčok čiernych a v každom stĺpci len konečne veľa políčok bielych?

Riešenie:

Áno, napríklad ako na obrázku:



2

N1 Dokážte, že dotyčnice vedené z bodu A ku kružnici so stredom O sú súmerne združené podľa priamky OA.

Riešenie:

Stačí dokázať, že súmerne združené sú body dotyku uvažovaných dotyčníc. Sú to však priesečníky danej kružnice s Tálesovou kružnicou nad priemerom OA a obe tieto kružnica sú podľa priamky OA súmerné.

Inak tiež stačí overiť zhodnosť trojuholníkov T_1OA a T_2OA, kde T_1, T_2 sú body dotyku týchto dotyčníc, a to podľa vety *Ssu*.

N2 Dokážte, že v ľubovoľnom lichobežníku je spojnica stredov jeho ramien rovnobežná s jeho základňami.

Riešenie:

Rozdeľme daný lichobežník jednou jeho uhlopriečkou na dva trojuholníky a uvážme ich stredné priečky rovnobežné so základňami lichobežníka. Odtiaľ použitím známych vlastností trojuholníkových priečok plynie, že spojnica stredov ramien lichobežníka je nielen rovnobežná s jeho základňami, ale navyše má dĺžku rovnú aritmetickému priemeru ich dĺžok.

D1 Uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ so základňami AB, CD sa pretínajú v bode P a priamky AD, BC v bode Q. Dokážte, že stredy základní AB, CD ležia na priamke PQ.

Riešenie:

Bod P je vnútorným stredom rovnoľahlosti úsečiek AB a CD, bod Q je vonkajším stredom ich rovnoľahlosti. V oboch rovnoľahlostiach si stredy úsečiek AB, CD zodpovedajú, takže ležia so stredmi rovnoľahlostí P, Q na tej istej priamke.

D2 (Mexico 1999,
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1681483p10720804)

V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD označme P priesečník osí vonkajších uhlov pri vrcholoch A, D a podobne Q priesečník osí vonkajších uhlov pri vrcholoch B, C. Dokážte, že dĺžka úsečky PQ je rovná polovici obvodu $ABCD$.

Riešenie:

Keďže body P, Q ležia na osiach dvoch uhlov, sú to stredy kružníc dotýkajúcich sa priamok AB, CD a postupne ramien AD, BC. Body P, Q preto ležia na osi pásu medzi rovnobežkami AB a CD, ktorá prechádza stredmi M, N ramien AD, BC. Ľahko dopočítame, že $|\sphericalangle APD| = 90° = |\sphericalangle BQC|$, takže body P, Q ležia na kružniciach s priemermi AD, BC. Potom platí

$$|PQ| = |PM| + |MN| + |NQ| = \frac{1}{2}\,|DA| + \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) + \frac{1}{2}\,|BC| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|).$$

D3 (Južná Afrika 2003,
https://artofproblemsolving.com/community/c4616_2003_south_africa_national_olympiad)

Je daný konvexný päťuholník $ABCDE$ taký, že trojuholníky ABC, BCD, CDE, DEA majú všetky rovnaký obsah. Úsečky AC, AD pretnú úsečku BE postupne v bodoch M, N. Dokážte, že $|BM| = |NE|$.

Riešenie:

Z rovnosti obsahov BCD a CDE plynie $BE \parallel CD$. Podobne dokážeme $BC \parallel AD$ a $DE \parallel AC$, takže trojuholníky BCM a NDE sú podobné (*uu*). Keďže $BE \parallel CD$, výšky týchto dvoch trojuholníkov z vrcholov C, D sú zhodné, takže ide o dva zhodné trojuholníky, a preto $|BM| = |NE|$.

D4 (Rusko 2008,
https://artofproblemsolving.com/community/c5168_2008_allrussian_olympiad)

V dotyčnicovom štvoruholníku $ABCD$ označme P priesečník polpriamok AD a BC, ďalej Q priesečník polpriamok BA a CD a napokon R kolmý priemet bodu D na priamku PQ. Dokážte, že kružnice vpísané trojuholníkom ADQ a CDP vidieť z bodu R pod rovnakým uhlom.

Riešenie:

Označme I, J stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ADQ, CDP a r_I, r_J ich polomery. Vďaka podobnosti trojuholníkov stačí dokázať rovnosť $|RI| / |RJ| = r_I/r_J$. Ďalej označme K stred a r polomer kružnice vpísanej do štvoruholníka $ABCD$ a E priesečník priamok IJ a PQ. Body K, I ležia na osi uhla BQC tak, že $|QK| / |QI| = r/r_I$. Podobne body K, J ležia na osi uhla APB tak, že $|PK|/|PJ| = r/r_J$. Po dosadení za druhý a tretí zlomok v rovnosti

$$\frac{|EI|}{|EJ|} \cdot \frac{|PJ|}{|PK|} \cdot \frac{|QK|}{|QI|} = 1$$

(Menelaova veta pre trojuholník IJK) vychádza $|EI|/|EJ| = r_I/r_J$. Zároveň zrejme platí aj $|DI|/|DJ| = r_I/r_J$. Kružnica s priemerom DE je teda Apollóniovou kružnicou pre body I, J a pomer r_I/r_J. Keďže $|\sphericalangle DRE| = 90°$, bod R leží na tejto kružnici, a tak platí $|RI|/|RJ| = r_I/r_J$, ako sme chceli dokázať.

3

N1 Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že $75 \cdot n$ je tretia mocnina celého čísla.

Riešenie:

Celé číslo je treťou mocninou, práve keď sa v jeho rozklade na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnine, ktorá je násobkom troch. Keďže $75 = 3 \cdot 5^2$, hľadané najmenšie n je rovné $3^2 \cdot 5 = 45$.

N2 Nech k je celé číslo také, že $k \geq 2$. Dokážte, že ak v rovnosti $a \cdot b = c$ sú dve z troch zastúpených kladných celých čísel a, b, c rovné k-tým mocninám celých čísel, platí to isté aj pre tretie číslo.

Riešenie:

Vyjdeme z poznatku, že celé číslo je k-tou mocninou, práve keď sa v jeho rozklade na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnine, ktorá je násobkom čísla k. V našej situácii pre ľubovoľné prvočíslo p označme postupne α, β, γ (nezáporné) počty zastúpenia tohto p v rozkladoch na prvočinitele čísel a, b, c. Potom rovnosť $a \cdot b = c$ znamená $\alpha + \beta = \gamma$, takže dokazované tvrdenie plynie zo zrejmej vlastnosti, že ak sú dve z takých čísel α, β, γ deliteľné daným číslom k, je ním deliteľné aj to tretie.

N3 Dokážte, že pre všetky dostatočne veľké kladné celé čísla n platí:

a) $n^2 > 10n + 100$.

b) $2^n > 10n^2$.

c) $3^n > 10 \cdot 2^n$.

Riešenie:

a) Ak $n > 20$, zrejme platí $n^2 - 10n - 100 = n(n - 10) - 100 > 20 \cdot 10 - 100 > 0$.

b) Zrejme $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$. Navyše ak dokazovaná nerovnosť platí pre nejaké n také, že $n \geq 10$, tak platí i pre $n + 1$: Skutočne, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10n^2 \geq 10(n + 1)^2$, kde posledná nerovnosť platí, pretože je ekvivalentná s nerovnosťou $n(n - 2) \geq 1$, zrejme platnou dokonca pre každé n také, že $n \geq 3$.

c) I keď aj tu je dôkaz indukciou ľahký, ukážme, ako sa zaobísť bez nej: Nerovnosť prepísaná do tvaru $(3/2)^n > 10$ je splnená (vzhľadom na $\frac{3}{2} > 1$ a odtiaľ plynúci fakt, že funkcia $x \mapsto (3/2)^x$ je všade rastúca), práve keď platí $n > \log_{3/2} 10 \doteq 5{,}68$.

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n, k väčšie než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buď celé, alebo iracionálne.

Riešenie:

Predpokladajme, že číslo $\sqrt[k]{n}$ je racionálne, takže $\sqrt[k]{n} = u/v$, kde u a v sú celé kladné čísla. Potom platí rovnosť $n \cdot v^k = u^k$ a z výsledku úlohy N2 plynie, že tiež číslo n je k-tou mocninou celého čísla, t. j. číslo $\sqrt[k]{n}$ je celé.

D2 Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla.

Riešenie:

Ľahko overíme, že ak $n > 11$, tak platí $n^2 < n^2 + n - 11 < (n + 1)^2$. Stačí teda prebrať n také, že $n \leq 11$, vyhovujú práve 3, 4 a 11.

D3 Určte všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

Riešenie:

59–A–III–1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=314).

D4 Pre ktoré dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$?

Riešenie:

(IMO 2006, http://www.imo-official.org/problems.aspx)

---

4 Riešenie sústavy rovníc často začíname tak, že niektoré dve jej rovnice od seba odčítame alebo niekoľko jej rovníc sčítame. Niekedy sa pritom vyplatí zmienené rovnice dopredu vynásobiť vhodnými číslami alebo i výrazmi s neznámymi, aby sme získali ich čo najjednoduchší dôsledok.

N1 Použite popísanú metódu na vyriešenie sústav v obore reálnych čísel:

a) $3x + 2y = x^2$ a $2x + 3y = y^2$.

b) $3xy - 10 = 2x^2$ a $2xy + 15 = 3y^2$.

Riešenie:

a) $(x, y) \in \{(0, 0), (5, 5)\}$ a $(x, y) \in \{(2, -1), (-1, 2)\}$.

Odčítaním rovníc a úpravou výsledku dostaneme $(x - y)(x + y - 1) = 0$, odkiaľ $y = x$ alebo $y = 1 - x$. Po dosadení takých y vyjdú v prvom, resp. druhom prípade vždy dve vyššie uvedené riešenia.

b) $(x, y) \in \{(2, 3), (-2, -3)\}$.

Vynásobme dané rovnice postupne výrazmi y a x. Po ich následnom sčítaní sa vo výsledku kubické členy navzájom zrušia, a dostaneme tak rovnicu $15x - 10y = 0$, podľa ktorej $x = 2t$ a $y = 3t$ pre vhodné reálne t. Po dosadení takých x a y vyjde rovnica $t^2 = 1$ s koreňmi ± 1, ktorým zodpovedajú vyššie uvedené riešenia.

N2 Ukážte, že z prvých dvoch rovníc sústavy zo súťažnej úlohy vyplýva, že obe čísla $z - x$ a $x + y + z$ sú rôzne od nuly. Aké sú obdobné dôsledky iných dvoch rovníc?

Riešenie:

Posudzované dve rovnice od seba odčítajte a výsledok potom upravte.

D1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

Riešenie:

Česko, 57–A–III–1 (http://www.matematickaolympiada.cz/media/440727/A57iii.pdf).

D2 V obore reálnych čísel riešte sústavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

Riešenie:

68–A–III–1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3121).

D3 Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x + y} + z = 1,$$
$$\frac{1}{y + z} + x = 1,$$
$$\frac{1}{z + x} + y = 1.$$

Riešenie:

69–A–II–1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3386).

D4 Navzájom rôzne reálne čísla a, b, c spĺňajú $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokážte, že $|abc| = 1$.

Riešenie:

Prvú rovnosť prepíšeme na $a - b = 1/c - 1/b = (b - c)/(bc)$. Podobne dostaneme $b - c = (c - a)/(ca)$ a $c - a = (a - b)/(ab)$. Po vynásobení troch odvodených rovností a následnom vydelení nenulovým číslom $(a - b)(b - c)(c - a)$ už získame požadované $(abc)^2 = 1$.

D5 Nájdite všetky reálne čísla x také, pre ktoré platí $x \geq 3$ a

$$x + \sqrt{(x - 1)(x - 2)} + \sqrt{(x - 1)(x - 3)} + \sqrt{(x - 2)(x - 3)} = 5.$$

Riešenie:

Odčítame 1 a upravíme na

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}) = 4.$$

Po podobnom odčítaní 2, resp. 3 získame

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}) = 3$$

a

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}) = 2.$$

Odvodenú trojicu vzťahov teraz ľahko vyriešime ako sústavu: Ak vydelíme vždy súčin dvoch rovníc tou treťou, dostaneme (vzhľadom na nezápornosť súčtu dvoch odmocnín)

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2} &= \sqrt{4\cdot 3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{24},\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x-3} &= \sqrt{4\cdot 2/3} = \frac{1}{3}\sqrt{24},\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} &= \sqrt{3\cdot 2/4} = \frac{1}{4}\sqrt{24},\end{aligned}$$

z čoho už ľahko (ako zo sústavy troch lineárnych rovníc pre neznáme hodnoty troch zastúpených odmocnín) určíme

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} &= \frac{7}{24}\sqrt{24},\\ \sqrt{x-2} &= \frac{5}{24}\sqrt{24},\\ \sqrt{x-3} &= \frac{1}{24}\sqrt{24}.\end{aligned}$$

Týmto trom vzťahom vyhovuje jediné x, a to $73/24$. Skúška dosadením do pôvodnej rovnice je ľahká.

D5 (IMO 2018, http://imo-official.org/problems.aspx)

Nájdite všetky celé čísla n také, že $n \geq 3$, pre ktoré existujú reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ také, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pre každé i z $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Riešenie:

Akékoľvek kladné n deliteľné tromi.

Ak vynásobíme i. rovnicu číslom a_{i+2} a všetky ich potom sčítame, vznikne na ľavej strane súčet členov tvaru $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ a súčet členov tvaru a_{i+2}. Ten istý výsledok na ľavej strane je možné dosiahnuť, ak pred sčítaním vynásobíme i. rovnicu číslom a_{i-1} (položíme pritom $a_0 = a_n$). Rovnosť oboch vzniknutých pravých strán $\sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}a_{i+2}$ je možné prepísať na tvar $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}-a_{i+2})^2 = 0$, takže musí platiť $a_{i-1} = a_{i+2}$ pre každé i z $\{1, 2, \ldots, n\}$. Odtiaľ v prípade $3 \nmid n$ vidíme, že dokonca všetky čísla a_i musí byť rovnaké, čo nie je možné, lebo rovnica $x^2 + 1 = x$ nemá reálne riešenie. Naopak, v prípade $3 \mid n$ podmienkam zo zadania úlohy zrejme vyhovieme n-ticou $(2, -1, -1, \ldots, 2, -1, -1)$.

5

N1 Dokážte *tvrdenie o Švrčkovom bode*:

V ľubovoľnom trojuholníku ABC prechádza os vnútorného uhla BAC stredom toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A.

Riešenie:

Označme S druhý priesečník osi uhla BAC s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Kratším oblúkom SB, SC tejto kružnice prislúchajú rovnako veľké obvodové uhly, takže tieto oblúky sú zhodné.

N2 Dokážte *tvrdenie „o troch prstoch"*:

V danom trojuholníku ABC označme I stred kružnice doňho vpísanej a S stred toho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, na ktorom neleží vrchol A. Potom platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

Riešenie:

Vzhľadom na symetriu stačí dokázať len rovnosť $|SB| = |SI|$. Pri štandardnom značení veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Pretože SIB je vonkajší uhol trojuholníka ABI, platí tiež

$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

Trojuholník SIB tak skutočne má zhodné ramená SB a SI.

N3 Dokážte, že v súťažnej úlohe je priamka S_bS_c osou úsečky AI.

Riešenie:

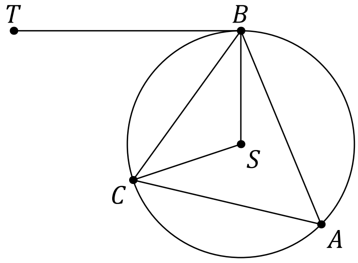
Podľa výsledku úlohy N2 platí $|S_bA| = |S_bI|$ a $|S_cA| = |S_cI|$, takže S_A, S_B sú dva rôzne body osi úsečky AI.

N4 Dokážte *vetu o úsekovom uhle*:

Nech ABC je trojuholník vpísaný do kružnice k a T bod dotyčnice kružnice k v bode B v polrovine opačnej k polrovine BCA. Potom platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Uhol TBC je tzv. *úsekový uhol* prislúchajúci tomu oblúku BC kružnice k, ktorý neobsahuje bod A.)

Riešenie:

Označme stred danej kružnice S:



Zo vzťahu medzi stredovým a obvodovým uhlom $|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BSC|$, z rovnoramennosti trojuholníka BSC máme $|\sphericalangle CBS| = 90° - \frac{1}{2}|\sphericalangle BSC|$. Z toho už dostávame $|\sphericalangle TBC| = 90° - |\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BAC|$.

D1 V situácii zo súťažnej úlohy označme ďalej S_a priesečník polpriamky AI s kružnicou k rôzny od A. Dokážte, že bod I je priesečníkom výšok trojuholníka $S_aS_bS_c$.

Riešenie:

Priamka S_bS_c je ako os úsečky AI (pozri N3) kolmá na S_aI. Podobne priamka S_bI je kolmá na S_aS_c.

D2 Označme I stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Označme tiež M a N stredy úsečiek AB a BI. Dokážte, že priamka CI je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BMN.

Riešenie:

70–A–III–2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3576).

D3 V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme postupne L, M stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný.

Riešenie:

56–A–III–2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=225).

D4 (IMO 2006,
http://imo-official.org/problems.aspx)

Označme I stred kružnice vpísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Jeho vnútorný bod P spĺňa podmienku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokážte, že $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastane, práve keď $P = I$.

Riešenie:

Nech $|\sphericalangle PBA| = \frac{1}{2}\beta + \delta$, potom $|\sphericalangle PBC| = \frac{1}{2}\beta - \delta$ a zo zadanej uhlovej podmienky ľahko plynie $|\sphericalangle PCA| = \frac{1}{2}\gamma - \delta$ a $|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\gamma + \delta$. Odtiaľ $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, takže uhol BPC má veľkosť $90° + \frac{1}{2}\gamma$, čo je, ako je známe, aj veľkosť uhla BIC. Preto bod P z polroviny BCA leží na oblúku BIC kružnice opísanej trojuholníku BIC. Tá má stred v strede kratšieho oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, čo je bod na polpriamke AI, takže I je tým bodom oblúka BIC, ktorý je k bodu A najbližšie.

D5 (Junior Balkan 2010,
https://artofproblemsolving.com/community/c4212_2010_junior_balkan_mo)

Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch B, C ostrohuhlého trojuholníku ABC pretnú protiľahlé strany postupne v bodoch K, L. Označme M priesečník priamky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na priamke CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokážte, že $|NK| = |NB|$.

Riešenie:

Bod M ako priesečník osi ostrého uhla CBL a osi úsečky CL je stredom kratšieho oblúka CL kružnice opísanej trojuholníku BCL. Odtiaľ a zo zadanej rovnobežnosti plynie $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle KNC|$, takže štvoruholník $BCKN$ je tetivový. Preto bod N leží na kratšom oblúku BK kružnice opísanej trojuholníku BCK, ktorý má ostrý uhol pri vrchole C, na ktorého osi bod N tiež leží. Je tak stredom zmieneného oblúka BK, odkiaľ už plynie $|NK| = |NB|$.

6

N1 Nájdite všetky kladné celé čísla t také, že čísla t, $2t - 1$ a $2t + 1$ sú všetky prvočísla.

Riešenie:

2 a 3, kedy ide o trojice prvočísel $(2, 3, 5)$, resp. $(3, 5, 7)$.

Pretože 1 nie je prvočíslo, ostáva vylúčiť prípad $t \geq 4$. Vtedy prvočíslo t dáva po delení tromi zvyšok 1 alebo 2. Ak $t = 3k + 1$, kde $k \geq 1$, číslo $2t + 1$ čiže $6k + 3$ je deliteľné tromi. Ak $t = 3k + 2$, kde $k \geq 1$, číslo $2t - 1$ čiže $6k + 3$ je deliteľné tromi.

N2 Sú dané reálne čísla d a q, pričom $q \notin \{0, 1\}$. Dokážte, že postupnosť $(x_0, x_1, \dots)$ spĺňa pre každý index i rovnosť $x_{i+1} = qx_i + d$, práve keď je jej všeobecný člen tvaru $x_i = kq^i + c$, kde $c = d/(1 - q)$ a k je ľubovoľná konštanta.

Riešenie:

Číslo c je zadané tak, že rovnosti $x_{i+1} = qx_i + d$ je možné prepísať do tvaru $x_{i+1} - c = q(x_i - c)$. Tieto upravené rovnosti znamenajú práve to, že čísla $x_i - c$ tvoria geometrickú postupnosť s kvocientom q, t. j. že pre každé i platí $x_i - c = kq^i$ kde k je ľubovoľná konštanta.

N3 Nech M je konečná množina, f je ľubovoľné zobrazenie také, že $f : M \to M$, a $m \in M$. Dokážte, že postupnosť $(m, f(m), f(f(m)), \dots)$ je od istého člena periodická. Ďalej dokážte, že ak zobrazenie f je prosté, tak táto postupnosť je periodická.

Riešenie:

Podľa Dirichletovho princípu sa medzi prvými $|M| + 1$ členmi postupnosti musí aspoň jeden prvok opakovať. Od jeho prvého výskytu tak postupnosť bude periodická, lebo každý ďalší člen zadanej postupnosti je jednoznačne určený predchádzajúcim členom. Keby postupnosť nebola periodická už od prvého člena, našli by sa v nej dva výskyty toho istého prvku, ktorému predchádzajú dva rôzne členy, čo nenastane, ak je zobrazenie f prosté.

N4 Dokážte, že pre každé nepárne číslo d sa zvyšky čísel 2^0, 2^1, 2^2, … po delení číslom d periodicky opakujú.

Riešenie:

Použite všeobecný výsledok úlohy N3 pre zobrazenie $z \mapsto 2z \pmod p$ na množine $\{1, 2, \dots, d - 1\}$.

N5 Dokážte *malú Fermatovu vetu*:

Pre ľubovoľné prvočíslo p a celé číslo a nesúdeliteľné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Riešenie:

Ukážte, že zobrazenie $t \mapsto a \cdot t \pmod p$ je prosté na množine $\{1, 2, \dots, p - 1\}$, takže je to bijekcia. Porovnaním súčinu všetkých $p - 1$ vzorov a súčinu všetkých $p - 1$ obrazov dostaneme

$$(p - 1)! \equiv (a \cdot 1)(a \cdot 2) \dots (a \cdot (p - 1)) \equiv a^{p-1}(p - 1)! \pmod p.$$

Po vydelení kongruencie číslom $(p-1)!$ (nesúdeliteľným s jej modulom p) už dostávame dokazované tvrdenie.

D1 Dokážte, že každé kladné celé číslo má násobok, v ktorého desiatkovom zápise sa vyskytujú len nuly a jednotky.

Riešenie:

Podľa Dirichletovho princípu medzi číslami 1, 11, 111, … existujú dve, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení naším číslom. Ich rozdiel má požadovanú vlastnosť.

D2 (USA 2003)

Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n existuje n-miestne číslo, ktoré je násobkom 5^n a ktorého všetky číslice sú nepárne.

Riešenie:

Dôkaz urobíme matematickou indukciou:

Ak $n = 1$, vyhovuje 5.

Majme pre n vyhovujúce a. Čísla $a + i \cdot 10^n$ pre i z $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ sú všetky násobkami 5^n a pritom dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení 5^{n+1}, takže jedno z nich je násobkom 5^{n+1}. Toto číslo je zrejme $(n + 1)$-miestne a všetky jeho číslice sú nepárne.

D3 Dokážte, že každé kladné celé číslo má násobok, ktorý je kladným Fibonacciho číslom. (Fibonacciho postupnosť F je určená vzťahmi $\mathrm{F}(0) = 0$, $\mathrm{F}(1) = 1$ a $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pre každý index n.)

Riešenie:

Nech d je ľubovoľné kladné celé číslo. Všade ďalej pod „zvyškami" rozumieme zvyšky po delení d. Sledujme zvyšky dvojíc po sebe nasledujúcich členov postupnosti F. Týchto dvojíc zvyškov je najviac $d \cdot d$ rôznych, teda medzi prvými $d^2 + 1$ dvojicami sa niektorá dvojica musí zopakovať. Keďže navyše zvyšok nasledujúceho člena je jednoznačne určený zvyškami dvoch predchádzajúcich členov, je postupnosť všetkých zvyškov od istého miesta periodická. Pretože navyše zo zvyškov dvoch susedných členov je možné jednoznačne určiť i zvyšky všetkých predchádzajúcich členov, je postupnosť zvyškov periodická (už od začiatku). A keďže F_0 čiže 0 je násobkom d, zvyšok 0 tak má dokonca nekonečne veľa Fibonacciho čísel.

D4 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré dávajú po delení štyrmi zvyšok 3.

Riešenie:

Dôkaz sporom: Pripusťme, že je takých prvočísel len konečne veľa, a označme ich všetky $p_1, \ldots, p_k$. Všimnime si, že ak niekoľko čísel dáva po delení štyrmi rovnaký zvyšok 1, má túto vlastnosť aj ich súčin. Nepárne číslo $4 \cdot p_1 p_2 \cdots p_k - 1$, ktoré označíme N, však dáva po delení štyrmi zvyšok 3, takže taký musí byť aj aspoň jeden z jeho prvočiniteľov (môže ním byť i samo číslo N). Žiadne z prvočísel p_1, ..., p_k však nie je deliteľom N, spor.

Kvôli zaujímavosti dodajme preslávenú *Dirichletovu vetu*: Pre každé dve nesúdeliteľné čísla d a z, kde $1 \leq z < d$, existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré dávajú po delení číslom d zvyšok z. Jej elementárny dôkaz nie je známy.