
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Zadania úloh domáceho kola kategórie A (maďarská verzia)

1 Kítlőthető-e egy $n \times n$ -es táblázat 1-esekkel és 2-esekkel úgy, hogy minden sorban a számok összege osztható legyen 5-tel és minden oszlopban a számok összege osztható legyen 7-tel? Oldd meg az

- a) $n = 9$,
- b) $n = 12$

esetekben!

(Tomáš Bárta)

2 Adott az AB és CD alapú $ABCD$ trapéz. Jelölje k és l a BC és AD átmérőjű körvonalakat! Továbbá jelölje P a BC és AD egyenesek metszéspontját! Bizonyítsd be, hogy a P pontból k körvonalhoz húzott érintők ugyanolyan szöveget zárnak be, mint a P pontból az l -re húzott érintők!

(Patrik Bak)

3 Keresd meg az összes olyan egész n számot, amelyre $n > 2$ és az n^{n-2} szám egy egész szám n -edik hatványa!

(Patrik Bak)

4 A valós számok halmazán oldd meg az

$$\begin{aligned}xy + 1 &= z^2, \\yz + 2 &= x^2, \\zx + 3 &= y^2\end{aligned}$$

egyenletrendszer!

(Tomáš Jurík)

5 Jelölje I a különböző oldalú ABC háromszög beírt körének középpontját, k pedig a köréírt körvonalát! A BI és CI félegyenesek a k körvonalat rendre az S_b és S_c pontokban metszik, ahol $S_b \neq B$ és $S_c \neq C$. Bizonyítsd be, hogy a k körvonal A pontjába húzott érintő, a BC oldallal párhuzamos I pontra illeszkedő egyenes, valamint az S_bS_c egyenes egy pontban metszi egymást!

(Patrik Bak)

6 Vegyük azt az egész számokból álló (a_0, a_1, a_2, \dots) végtelen sorozatot, amelyben $a_0 \geq 2$ és minden nemnegatív n indexre $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$. Bizonyítsd be, hogy a sorozat végtelen sok összetett számot tartalmaz!

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

A feladatok beküldésének határideje: **2021. 11. 30.**
