

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

## Zadania úloh domáceho kola kategórie B (maďarská verzia)

---

1 Egy derékszögű háromszög oldalának hosszai egész számok, kerülete pedig 11990. Továbbá tudjuk, hogy az egyik befogó hossza prímszám. Határozd meg ezt a hosszat!

(Patrik Bak)

2 Legyen  $ABC$  egy olyan hegyesszögű háromszög, amelynek  $BC$  a leghosszabb oldala. Az  $AB$  és  $AC$  oldalak belsejében fekszenek rendre azok a  $D$  és  $E$  pontok, amelyekre  $|CD| = |CA|$  és  $|BE| = |BA|$ . Jelölje  $F$  azt a pontot, amelyre az  $ABFC$  négyszög paralelogramma. Bizonyítsd be, hogy  $|FD| = |FE|$ .

(Patrik Bak, Josef Tkadlec)

3 Határozd meg azoknak a kilencjegyű számoknak a számát, amelyekben a 0-tól 9-ig terjedő számjegyek mindegyike legfeljebb egyszer fordul elő, s a számjegyek összege az 1.-től a 3. helyig, a 3.-tól az 5. helyig, az 5.-től a 7. helyig és a 7.-től a 9. helyig mind egyenlők 10-zel. Találd meg a legkisebb és legnagyobb ilyen számot!

(Jaroslav Zhouf)

4 Határozd meg az

$$x \cdot |x + 6p| = 36$$

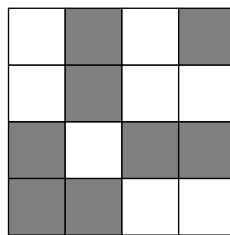
egyenlet valós gyökeinek számát a valós  $p$  paraméter értékétől függően!

(Vojtech Bálint)

5 Legyen  $A_1A_2 \dots A_n$  egy szabályos  $n$ -szög. Az  $A_3$  pontot tengelyesen tükrözve az  $A_2A_4$  egyenesen keresztül megkapjuk az  $A'_3$  pontot. Ezután az  $A'_3$  pontot tükrözzük tengelyesen az  $A_1A_3$  egyenesen keresztül, s ezzel megkapjuk az  $A''_3$  pontot. Az  $n$  mely értékeire lesz az  $A''_3$  pont azonos az  $A_1A_2$  és  $A_3A_4$  egyenesek metszéspontjával, ha  $n \geq 4$ ?

(Jaroslav Zhouf)

6 Adott egy  $m \times n$ -es sakktabla, melynek mezői hagyományos módon vannak kifestve feketére és fehérre úgy, hogy a bal felső mező fekete színű. Egy lépés alatt vagy két sor, vagy két oszlop kölcsönös felcserélését értjük. Folt alatt a fekete mezők azon nemüres halmazát értjük, amelyik az összes olyan mezőből áll, amelyekbe a folt egy tetszőleges mezőjéből eljuthatunk oldalszomszédos fekete mezőkből álló úton. Például az ábrán egy  $4 \times 4$ -es sakktabla látható pontosan négy darab folttal. Az  $m$  és  $n$  függvényében határozd meg azt a lehető legkisebb foltszámot, amely elérhető egy  $m \times n$ -es sakktablán véges sok lépés után!



(David Hruška)

---

A feladatok beküldésének határideje: 2022. 1. 17.

---