

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

## Zadania úloh domáceho kola kategórie C (maďarská verzia)

---

1 Az iskola kertjében diákok egy csoportja a molekula nevű játékot játsza. Először a tanár azt az utasítást adja, hogy alkossanak háromfős csoportokat. Egy diák felmarad, így ő kiesik a játékból. Ezután a továbbjátszó diákok négyfős csoportokra osztódnak, s megint felmarad egy diák, aki így kiesik a játékból. Majd ugyanígy ötfős csoportokra osztódnak, s szintén felmarad egy diák, aki kiesik a további játékból. A tanár most azt az utasítást adja, hogy osztódjanak hatfős csoportokra. Bizonyítsd be, hogy ismét egy diák fog felmaradni!

(Josef Tkadlec)

2 Keresd meg azokat a különböző kétjegyű számokból álló számnégyeseket, amelyekre egyszerre teljesülnek a következő feltételek:

(i) A számnégyes azon elemeinek összege amelyek tartalmazzák a 2-es számjegyet, egyenlő 80-nal.

(ii) A számnégyes azon elemeinek összege amelyek tartalmazzák a 3-as számjegyet, egyenlő 90-nel.

(iii) A számnégyes azon elemeinek összege amelyek tartalmazzák az 5-ös számjegyet, egyenlő 60-nal.

(Jaroslav Zhouf)

3 Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalának belsejében adottak a  $D$  és  $E$  pontok úgy, hogy  $|BD| = |DE| = |EC|$ , s az  $AC$  oldal belsejében adottak az  $F$  és  $G$  pontok úgy, hogy  $|AG| = |GF| = |FC|$ . Vegyük azt a háromszöget, amely az  $AE$ ,  $GD$ ,  $BF$  szakaszokkal van behatárolva. Bizonyítsd be, hogy ezen háromszög területének aránya az  $ABC$  háromszög területéhez viszonyítva csak egyetlen értéket vehet fel és határozd meg ezt az értéket!

(Jaroslav Zhouf)

4 Egy  $10 \times 10$ -es táblázat az 1 és  $-1$  számokkal van kitöltve úgy, hogy a számok összege, egy sor kivételével, minden sorban egyenlő nullával, s ugyanúgy a számok összege minden oszlopban, egy oszlop kivételével, egyenlő nullával. Határozd meg a táblázatban szereplő összes szám lehető legnagyobb összegét!

(Patrik Bak)

5 Adott az egyenlőoldalú  $ABC$  háromszög és az  $AB$  oldal belsejében egy  $D$  pont. A  $BC$ -vel ellentétes félegyenesen vegyük fel azt az  $E$  pontot, amelyre  $|CD| = |DE|$ . Bizonyítsd be, hogy ekkor  $|AD| = |BE|$ .

(Jaroslav Švrček)

6 Keresd meg az  $a + b + c + d$  összeg összes lehetséges értékét, ha az  $a, b, c, d$  olyan pozitív egész számok, amelyekre fennáll az

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021$$

egyenlőség!

(Mária Dományová, Patrik Bak)

---

A feladatok beküldésének határideje: **2022. 1. 17.**

---