MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Pre celé čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokážte, že potom pre ľubovoľné celé čísla k, l platí aj $n \mid ka + lb$ (špeciálne napríklad $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

N2 Pre celé čísla n, a, b, kde a, b sú nesúdeliteľné, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokážte, že potom platí aj $ab \mid n$.

N3 Máme vyjsť niekoľko schodov. Keby sme ich brali po dvoch, jeden zostane. Keby sme ich brali po troch, tiež zostane jeden. Dokážte, že to dopadne rovnako, keď schody budeme brať po šiestich.

D1 Pre celé čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokážte, že potom platí aj $\mathrm{nsn}(a, b) \mid n$.

D2 Pre celé čísla n, a_1, ..., a_k platí $a_i \mid n$ pre každé i z $\{1, 2, \dots, k\}$. Dokážte, že potom platí $\mathrm{nsn}(a_1, \dots, a_k) \mid n$.

D3 Je dané prirodzené číslo m také, že $m \geq 5$ a číslo $m + 1$ je deliteľné aspoň dvoma prvočíslami. Dokážte, že záver súťažnej úlohy platí všeobecnejšie: Postupne pre i z $\{3, 4, \dots, m\}$ žiakov rozdeľujeme do i-tíc, vždy jeden žiak zvýši a toho z ďalšej hry vylúčime. Potom aj pri následnom rozdeľovaní na $(m + 1)$-tice jeden žiak zvýši.

D4 Dokážte, že ak by sme v úlohe D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bolo deliteľné len jedným prvočíslom, tak záver všeobecne neplatí: Existuje také n, že prvých m rozdelení probehne so zadaným výsledkom, avšak pri následnom rozdeľovaní žiakov do $(m + 1)$-tíc sa nestane, že by zvýšil jeden žiak.

D5 Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu $n^4 + 11n^2 - 12$ deliteľná číslom d.

2

N1 Na tabuli sú napísané tri dvojmiestne (nie nutne rôzne) čísla také, že súčet tých s číslicou 1 je 36 a súčet tých s číslicou 5 je 40. Určte tieto tri čísla.

N2 Na tabuli sú napísané navzájom rôzne dvojmiestne čísla také, že každé z nich obsahuje číslicu 5 a súčet všetkých je 75. Určte tieto čísla (nájdite všetky možnosti).

D1 Na tabuli je napísaných 18 navzájom rôznych dvojmiestnych čísel. Súčet tých, ktoré obsahujú číslicu 1, je 593. Určte všetky možné hodnoty súčtu tých čísel, ktoré obsahujú číslicu 2.

D2 Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

D3 Nájdite najmenšie štvormiestne číslo $\overline{abcd}$ také, že $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmiestne číslo zapísané tromi rovnakými číslicami.

D4 Z číslic 0 až 9 vytvoríme päť dvojmiestnych čísel, pričom každú číslicu použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať ich súčet a ktoré hodnoty to sú.

3

N1 Dokážte známu vetu *o strednej priečke trojuholníka*: V trojuholníku ABC označme M, N postupne stredy strán AB, AC. Potom úsečka MN je rovnobežná sa stranou BC a má oproti nej polovičnú dĺžku.

N2 Dokážte známu vetu *o strednej priečke lichobežníka*: V lichobežníku $ABCD$, v ktorom $AB \parallel CD$, označme M, N postupne stredy ramien BC, AD. Potom úsečka MN je rovnobežná so základňami AB, CD a jej dĺžka je rovná aritmetickému priemeru oboch ich dĺžok.

N3 Je daný lichobežník $ABCD$, pre ktorého základne AB a CD platí $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Dokážte, že jeho stredná priečka je jeho uhlopriečkami rozdelená na tri rovnako dlhé úseky.

N4 V trojuholníku ABC leží bod K na strane AB a bod L na strane AC tak, že $2 \cdot |AK| = |BK|$ a $2 \cdot |AL| = |CL|$. Označme P priesečník úsečiek BL a CK. Vyjadrite vzdialenosť bodu P od priamky BC pomocou vzdialenosti bodu A od tej istej priamky BC.

D1 Je daný rovnobežník $ABCD$. Nech E, F, G, H sú postupne stredy jeho strán AB, BC, CD, DA. Priamky BH a AC sa pretínajú v bode I, priamky BD a EC v bode J, priamky AC a DF v bode K, priamky AG a BD v bode L. Dokážte, že štvoruholník $IJKL$ je rovnobežník.

D2 Je daný trojuholník ABC s ťažiskom T. Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti.

D3 Je daný trojuholník ABC, v ktorom D, E sú postupne stredy strán BC, AB. Nech F je stred úsečky BE a G vnútorný bod strany AC, pre ktorý platí $|AG| = 3 \cdot |CG|$. Dokážte, že priesečník priamok DF a GE leží na tej rovnobežke s priamkou BC, ktorá prechádza bodom A.

D4 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Nech body D a E sú päty kolmíc postupne z bodov B a C na os vonkajšieho uhla BAC. Označme F priesečník úsečiek BE a CD. Dokážte, že priamka AF je kolmá na priamku DE.

4

N1 Do jedného riadku je zapísaných 71 čísel. Každé z nich je 1 alebo -1 a pritom súčet každých desiatich susedných čísel je rovný 0. Dokážte, že prvé číslo sa rovná poslednému číslu, a určte najväčší možný súčet všetkých čísel.

N2 Tabuľka 5×4 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom štvorci 2×2 je 0. Určte najväčší možný súčet všetkých čísel v tabuľke.

N3 Pre ktoré d z $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vyfarbiť niekoľko políčok tabuľky 6×6 tak, aby v každom riadku aj každom stĺpci bolo práve d vyfarbených políčok?

D1 Je možné vyplniť štvorcovú tabuľku číslami 1 a -1 tak, aby súčet čísel v nejakom stĺpci bol párny a v inom stĺpci bol nepárny?

D2 Je možné vyplniť tabuľku 10×10 číslami 1 a -1 tak, aby v každom riadku bol súčet čísel rovnaký a v každom stĺpci bol iný?

D3 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že v aspoň 9 riadkoch je súčet čísel kladný.

a) Dokážte, že v aspoň jednom stĺpci je súčet čísel kladný.

b) Platí rovnaký záver aj za slabšieho predpokladu, že súčet čísel je kladný v aspoň 8 riadkoch?

D4 Určte, pre ktoré kladné prirodzené čísla n je možné tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku aj každom stĺpci bol rovný 0.

D5 Určte, pre ktoré kladné prirodzené čísla n je možné štvorcovú tabuľku $n \times n$, ktorej polia sú ofarbené ako polia šachovnice, vyplniť číslami 2 a -1 tak, že súčasne platí:

- Súčet všetkých čísel v každom riadku aj v každom stĺpci tabuľky je 0.
- Súčet čísel na všetkých čiernych poliach tabuľky sa rovná súčtu čísel na všetkých jej bielych poliach.

D6 Určte, pre ktoré kladné prirodzené čísla n je možné tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 1, 2 a -3 tak, aby súčet čísel v každom riadku aj každom stĺpci bol 0.

5

N1 V situácii zo súťažnej úlohy nájdite dve dvojice zhodných uhlov veľkostí menších než 60°.

N2 V situácii zo súťažnej úlohy nájdite príklad dvoch trojuholníkov, označme ich $K_1L_1M_1$ a $K_2L_2M_2$, ktoré spĺňajú tieto podmienky: $|L_1M_1| = |L_2M_2|$, $|\sphericalangle K_1M_1L_1| = |\sphericalangle K_2M_2L_2|$ a $|\sphericalangle L_1K_1M_1| + |\sphericalangle L_2K_2M_2| = 180°$. Potom dokážte, že z týchto troch všeobecne zapísaných podmienok plynie rovnosť $|K_1L_1| = |K_2L_2|$.

D1 V trojuholníku ABC označme M stred strany BC, N stred ťažnice AM a P priesečník polpriamky BN so stranou AC. Určte pomer $|AP| : |PC|$.

D2 V trojuholníku ABC je bod M stredom strany BC. Bod K leží na ťažnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je priesečník polpriamky CK so stranou AB. Dokážte, že trojuholník AKL je rovnoramenný.

D3 Nech D, E sú postupne stredy strán AB, BC trojuholníka ABC a F je stred úsečky AD. Dokážte, že priamka CD rozpoľuje úsečku EF.

D4 V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou BC so stredom D označme M stred ťažnice AD a P pätu kolmice z bodu D na priamku BM. Dokážte, že $AP \perp PC$.

D5 Je daný pravidelný päťuholník $ABCDE$, v ktorom M je päta kolmice z vrcholu D na stranu AB. Priesečník osi úsečky DM s priamkou AC označme K. Dokážte, že uhol AKD je pravý.

6

N1 Pre prirodzené čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určte všetky možné hodnoty ich súčtu.

N2 Pre prirodzené čísla a, b, c platí $a(a + b + c) + bc = 143$. Určte všetky možné hodnoty $|b - c|$.

D1 V každom políčku tabuľky 2×2 je napísané prirodzené číslo. Ak sčítame súčin čísel v prvom stĺpci, súčin čísel v druhom stĺpci, súčin čísel v prvom riadku a súčin čísel v druhom riadku, dostaneme výsledok 2021.

a) Určte všetky možné hodnoty súčtu všetkých štyroch čísel v tabuľke.

b) Nájdite počet tabuliek spĺňajúcich zadanie, ktoré obsahujú štyri navzájom rôzne čísla.

D2 Na každej stene kocky je napísané kladné prirodzené číslo. Ku každému jej vrcholu je pripísaný súčin troch čísel na priľahlých stenách. Súčet ôsmich čísel pri vrcholoch je 1001. Určte všetky možné hodnoty súčtu čísel na stenách.

D3 Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.

D4 Na tabuli je napísaných päť (nie nutne rôznych) prvočísel, ktorých súčin je 105-krát väčší než ich súčet. Určte tieto prvočísla.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Pre celé čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokážte, že potom pre ľubovoľné celé čísla k, l platí aj $n \mid ka + lb$ (špeciálne napríklad $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

Riešenie:

Podmienky $n \mid a$ a $n \mid b$ znamenajú existenciu celých čísel a', b' takých, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ak + bl = a'nk + b'nl = n(a'k + b'l)$, čo znamená, že $n \mid ka + lb$.

N2 Pre celé čísla n, a, b, kde a, b sú nesúdeliteľné, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokážte, že potom platí aj $ab \mid n$.

Riešenie:

Pre ľubovoľné prvočíslo p označme a_p, b_p, n_p exponenty mocnín prvočísla p v rozkladoch čísel a, b, n na prvočinitele. Naším cieľom je dokázať nerovnosť $a_p + b_p \le n_p$. Vďaka nesúdeliteľnosti a, b je v súčte $a_p + b_p$ aspoň jeden sčítanec rovný nule a pritom podľa zadania platí $a_p \le n_p$ aj $b_p \le n_p$.

N3 Máme vyjsť niekoľko schodov. Keby sme ich brali po dvoch, jeden zostane. Keby sme ich brali po troch, tiež zostane jeden. Dokážte, že to dopadne rovnako, keď schody budeme brať po šiestich.

Riešenie:

Nech n je počet schodov. Podľa prvej podmienky platí $2 \mid n - 1$, podľa druhej $3 \mid n - 1$. Keďže 2 a 3 sú nesúdeliteľné čísla, podľa výsledku úlohy N2 platí aj $6 \mid n - 1$, a to je dokazované tvrdenie.

D1 Pre celé čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokážte, že potom platí aj $\operatorname{nsn}(a, b) \mid n$.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v úlohe N2: Ak sú a_p, b_p, n_p príslušné exponenty, tak z nerovností $a_p \le n_p$ a $b_p \le n_p$ máme $\max(a_p, b_p) \le n_p$, kde však $\max(a_p, b_p)$ je zrejme exponent prvočísla p v rozklade čísla $\operatorname{nsn}(a, b)$.

D2 Pre celé čísla n, a_1, …, a_k platí $a_i \mid n$ pre každé i z $\{1, 2, \dots, k\}$. Dokážte, že potom platí $\operatorname{nsn}(a_1, \dots, a_k) \mid n$.

Riešenie:

Postupujte analogicky ako pri riešení úlohy D1.

D3 Je dané prirodzené číslo m také, že $m \ge 5$ a číslo $m + 1$ je deliteľné aspoň dvoma prvočíslami. Dokážte, že záver súťažnej úlohy platí všeobecnejšie: Postupne pre i z $\{3, 4, \dots, m\}$ žiakov rozdeľujeme do i-tíc, vždy jeden žiak zvýši a toho z ďalšej hry vylúčime. Potom aj pri následnom rozdeľování na $(m + 1)$-tice jeden žiak zvýši.

Riešenie:

Nech n je počet žiakov. Podmienku, čo sa stane v i. kroku, zapíšeme v tvare $i \mid n - i + 2$, čo je ekvivalentné s $i \mid n + 2$. Podľa výsledku úlohy D2 to znamená, že $\operatorname{nsn}(3, 4, \dots, m) \mid n + 2$. Keďže číslo $m + 1$ je deliteľné aspoň dvoma prvočíslami, je možné ho zapísať v tvare $a \cdot b$ s dvoma nesúdeliteľnými číslami a a b takými, že $a, b \le m$. Každé z čísel a, b určite delí číslo $\operatorname{nsn}(3, 4, \dots, m)$ (aj keď $a = 2$ alebo $b = 2$), teda aj číslo $n + 2$. To (podľa výsledku N2) znamená, že platí aj $m + 1 = ab \mid n + 2$.

D4 Dokážte, že ak by sme v úlohe D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bolo deliteľné len jedným prvočíslom, tak záver všeobecne neplatí: Existuje také n, že prvých m rozdelení probehne so zadaným výsledkom, avšak pri následnom rozdeľovaní žiakov do $(m + 1)$-tíc sa nestane, že by zvýšil jeden žiak.

Riešenie:

Využijeme poznatky z riešenia úlohy D3. Nech $n = \operatorname{nsn}(3, 4, \dots, m) - 2$. Pretože zrejme $n > m - 2$, t. j. $n + 2 - m > 0$, a zároveň pre každé i z $\{3, 4, \dots, m\}$ platí $i \mid \operatorname{nsn}(3, 4, \dots, m) = n + 2$, postupné rozdelenia do i-tíc pre také i požadovaným spôsobom prebehne a rozdeľovanie do $(m + 1)$-tíc sa potom zúčastní $n + 2 - m$ žiakov. Ak však $m + 1 = p^k$, kde p je prvočíslo a k je kladné celé číslo, tak číslo $n + 2$ čiže $\operatorname{nsn}(3, 4, \dots, m)$ už nebude deliteľné číslom $m + 1$, pretože v rozklade takého čísla $n + 2$ sa prvočíslo p vyskytuje iba v $(k - 1)$. mocnine. Takže rozdelenie do $(m + 1)$-tíc vo výsledku s jedným zvyšným žiakom neprebehne.

D5 Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu $n^4 + 11n^2 - 12$ deliteľná číslom d.

Riešenie:

66. ročník, C, domáce kolo, 2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=2241).

2

N1 Na tabuli sú napísané tri dvojmiestne (nie nutne rôzne) čísla také, že súčet tých s číslicou 1 je 36 a súčet tých s číslicou 5 je 40. Určte tieto tri čísla.

Riešenie:

Zamerajme sa na zadaný súčet 40. Pretože toto číslo nemá číslicu 5, nemôže to byť ani „súčet" jedného, ani všetkých troch napísaných čísel, ktoré by sa museli končiť číslicou 5, lebo sú menšie než 50; musí ísť teda o súčet dvoch čísel končiacich sa číslicou 5, teda nutne čísel 15 a 25. Zvyšné tretie číslo musí s číslom 15 dávať zadaný súčet 36, takže ide o číslo 21 (ktoré skutočne obsahuje číslicu 1).

N2 Na tabuli sú napísané navzájom rôzne dvojmiestne čísla také, že každé z nich obsahuje číslicu 5 a súčet všetkých je 75. Určte tieto čísla (nájdite všetky možnosti).

Riešenie:

Ak je napísané číslo jedno, tak je to samo číslo 75. Ak sú napísané čísla dve, tak číslicou 5 sa môže len jedno číslo začínať a len jedno končiť, máme teda $75 = \overline{5?} + \overline{?5}$, čo je jedine $50 + 25$. Ak sú napísané aspoň tri čísla, tak súčet všetkých je aspoň $15 + 25 + 35 = 75$; sú to preto práve tri čísla, a to 15, 25 a 35.

D1 Na tabuli je napísaných 18 navzájom rôznych dvojmiestnych čísel. Súčet tých, ktoré obsahujú číslicu 1, je 593. Určte všetky možné hodnoty súčtu tých čísel, ktoré obsahujú číslicu 2.

Riešenie:

Počet všetkých dvojmiestnych čísel s číslicou 1 je rovný 18 zo zadania úlohy, sú to totiž čísla 10, 11, …, 19 a 21, 31, …, 91 a ich súčet je rovný práve číslu 593 zo zadania úlohy. Na tabuli sú teda všetky tieto čísla a žiadne iné. Tie s číslicou 2 sú práve 12 a 21. Hľadaný súčet je teda $12 + 21$ čiže 33.

D2 Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Riešenie:

69. ročník, C, domáce kolo, 1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3388).

D3 Nájdite najmenšie štvormiestne číslo $\overline{abcd}$ také, že $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmiestne číslo zapísané tromi rovnakými číslicami.

Riešenie:

67. ročník, C, domáce kolo, 1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=2597).

D4 Z číslic 0 až 9 vytvoríme päť dvojmiestnych čísel, pričom každú číslicu použijeme práve raz. Zistite, koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať ich súčet a ktoré hodnoty to sú.

Riešenie:

70. ročník, B, domáce kolo, 1 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3472).

3

N1 Dokážte známu vetu *o strednej priečke trojuholníka*: V trojuholníku ABC označme M, N postupne stredy strán AB, AC. Potom úsečka MN je rovnobežná sa stranou BC a má oproti nej polovičnú dĺžku.

Riešenie:

Trojuholníky ABC a AMN sú podobné s koeficientom 1/2 (veta *sus*), takže platí $|MN| = |AB|/2$ a uhly ABC, AMN sú zhodné, odkiaľ plynie $MN \parallel BC$.

N2 Dokážte známu vetu *o strednej priečke lichobežníka*: V lichobežníku $ABCD$, v ktorom $AB \parallel CD$, označme M, N postupne stredy ramien BC, AD. Potom úsečka MN je rovnobežná so základňami AB, CD a jej dĺžka je rovná aritmetickému priemeru oboch ich dĺžok.

Riešenie:

Uvažujme stred K uhlopriečky AC. Potom MK a NK sú postupne stredné priečky trojuholníkov ABC a ACD, takže (podľa N1) jednak platí $MK \parallel AB \parallel CD \parallel NK$, preto bod K leží na úsečke MN rovnobežnej so základňami, jednak platí $|MK| = |AB|/2$ a $|NK| = |CD|/2$, odkiaľ $|MN| = |MK| + |NK| = (|AB| + |CD|)/2$.

N3 Je daný lichobežník $ABCD$, pre ktorého základne AB a CD platí $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Dokážte, že jeho stredná priečka je jeho uhlopriečkami rozdelená na tri rovnako dlhé úseky.

Riešenie:

Zachovajme označenie z riešenia úlohy N2. Tam sme ukázali, že stred K uhlopriečky AC je jej priesečníkom so strednou priečkou MN a pritom platí $|MK| : |NK| = (|AB|/2) : (|CD|/2) = |AB| : |CD|$. Analogicky musí platiť, že stred L uhlopriečky BD je jej priesečníkom so strednou priečkou NM a pritom $|ML| : |NL| = |CD| :$

$|AB|$. Z podmienky $|AB| = 2 \cdot |CD|$ tak plynie, že body K, L delia úsečku MN na tri zhodné úseky.

N4 V trojuholníku ABC leží bod K na strane AB a bod L na strane AC tak, že $2 \cdot |AK| = |BK|$ a $2 \cdot |AL| = |CL|$. Označme P priesečník úsečiek BL a CK. Vyjadrite vzdialenosť bodu P od priamky BC pomocou vzdialenosti bodu A od tej istej priamky BC.

Riešenie:

Označme v vzdialenosť A od BC. Trojuholníky ABC a AKL sú podobné podľa vety *sus* s koeficientom $1/3$, takže $|KL| = |BC|/3$, $KL \parallel BC$ a vzdialenosť bodu A od priamky KL je $v/3$. Odtiaľ pre neznáme vzdialenosti u, w bodu P postupne od priamok BC a KL plynie $u + w = v - v/3 = 2v/3$. Z podobnosti trojuholníkov BCP a KLP (veta *uu*) získame pre u, w druhú rovnicu $w/u = |KL| / |BC| = 1/3$. Teraz už ľahko vypočítame, že $u = v/2$ (a $w = v/6$).

D1 Je daný rovnobežník $ABCD$. Nech E, F, G, H sú postupne stredy jeho strán AB, BC, CD, DA. Priamky BH a AC sa pretínajú v bode I, priamky BD a EC v bode J, priamky AC a DF v bode K, priamky AG a BD v bode L. Dokážte, že štvoruholník $IJKL$ je rovnobežník.

Riešenie 1:

Nech S je stred rovnobežníka $ABCD$. Všimnime si, že bod I je ťažiskom $\triangle ABD$ a bod K je ťažiskom $\triangle BCD$. Preto $|IS| = |SA|/3 = |SC|/3 = |KS|$. Analogicky $|JS| = |LS|$. Uhlopriečky štvoruholníka $IJKL$ sa navzájom rozpoľujú, takže ide o rovnobežník.

Riešenie 2:

Uvažujme stredovú súmernosť podľa stredu rovnobežníka $ABCD$. V nej sa H zobrazí na F a E na G. Priesečník I úsečiek BH a AC sa preto zobrazí na priesečník úsečiek DF a AC čiže na K. Analogicky dokážeme, že aj J sa zobrazí na L. Tým pádom obrazom úsečky IJ je úsečka KL, takže $IJKL$ je skutočne rovnobežník.

D2 Je daný trojuholník ABC s ťažiskom T. Na priamkach AT a BT sú zvolené postupne body E a F tak, že štvoruholník $TECF$ je rovnobežník. Dokážte, že úsečky AC a BC delia úsečku EF na tri zhodné časti.

Riešenie:

70. ročník, C, domáce kolo, 5 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3473).

D3 68. ročník, C, školské kolo, 3 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3047)

Je daný trojuholník ABC, v ktorom D, E sú postupne stredy strán BC, AB. Nech F je stred úsečky BE a G vnútorný bod strany AC, pre ktorý platí $|AG| = 3 \cdot |CG|$. Dokážte, že priesečník priamok DF a GE leží na tej rovnobežke s priamkou BC, ktorá prechádza bodom A.

Riešenie:

Uvažujte dva priesečníky dotyčnej rovnobežky: jednak s priamkou DF, jednak s priamkou GE. Tieto dva priesečníky splynú, ak budú mať rovnakú vzdialenosť od bodu A.

D4 CPSJ 2021 (https://skmo.sk/dokumenty.php?rocnik=70)

Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Nech body D a E sú päty kolmíc postupne z bodov B a C na os vonkajšieho uhla BAC. Označme F priesečník úsečiek BE a CD. Dokážte, že priamka AF je kolmá na priamku DE.

Riešenie:

Cieľom je dokázať $BD \parallel AF$. Na to stačí overiť, že pre priečku AF v $\triangle EDB$ platí $|AE| : |AD| = |FE| : |FB|$. Na to použijeme podobnosť $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ a potom podobnosť $\triangle FEC \sim \triangle FBD$, podľa ktorých postupne dostaneme $|AE| : |AD| = |CE| : |DB| = |FE| : |FB|$.

4

N1 Do jedného riadku je zapísaných 71 čísel. Každé z nich je 1 alebo -1 a pritom súčet každých desiatich susedných čísel je rovný 0. Dokážte, že prvé číslo sa rovná poslednému číslu, a určte najväčší možný súčet všetkých čísel.

Riešenie:

Prvých 70 čísel rozdelíme na 7 desatíc so súčtom nula. Súčet všetkých čísel je teda rovný poslednému číslu. Podobne zistíme, že súčet všetkých čísel je rovný prvému číslu, keď uvážime rozdelenie na 7 desatíc posledných 70 čísel. Prvé a posledné číslo sa teda rovnajú, a to súčtu všetkých čísel, ktorý je tak najviac 1.

Príklad 71 čísel $1, -1, 1, \dots, -1, 1$ spĺňa podmienku úlohy a ich celkový súčet je rovný 1, čo je teda hľadaný najväčší možný súčet.

N2 Tabuľka 5×4 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom štvorci 2×2 je 0. Určte najväčší možný súčet všetkých čísel v tabuľke.

Riešenie:

Danú tabuľku 5×4 (s piatimi riadkami a štyrmi stĺpcami) rozdeľme na horný riadok 1×4 a štyri štvorce 2×2

s nulovými súčtami vpísaných čísel. Súčet všetkých čísel v tabuľke je teda rovný súčtu čísel v prvom riadku, takže je najviac 4.

Súčet 4 dosiahneme, ak tabuľku vyplníme tak, že do prvého, tretieho a piateho riadku dáme samé 1, kým do druhého a štvrtého riadku dáme samé -1.

N3 Pre ktoré d z $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vyfarbiť niekoľko políčok tabuľky 6×6 tak, aby v každom riadku aj každom stĺpci bolo práve d vyfarbených políčok?

Riešenie:

Pre každé také d, a to napríklad tak, že ofarbíme políčka, ktoré na obrázku obsahujú čísla nepresahujúce d.

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

D1 Je možné vyplniť štvorcovú tabuľku číslami 1 a -1 tak, aby súčet čísel v nejakom stĺpci bol párny a v inom stĺpci bol nepárny?

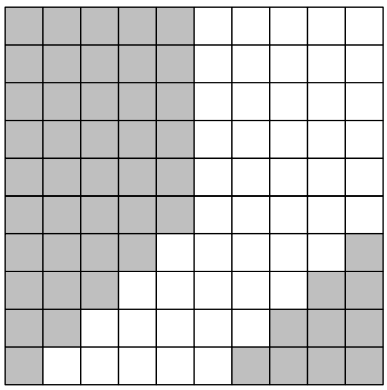
Riešenie:

V štvorcovej tabuľke $n \times n$ je v každom stĺpci n čísel. Ak je a z nich 1, ostatných $n - a$ je -1, takže súčet čísel v tomto stĺpci je $a - (n - a)$ čiže $2a - n$. Toto číslo je párne, resp. nepárne, práve keď je také aj číslo n. Teda všetky súčty čísel v jednotlivých stĺpcoch majú rovnakú paritu. (Iné vysvetlenie: Parita súčtu čísel v danom stĺpci sa nezmení, keď v ňom každé číslo -1 zameníme číslom 1.) Tabuľku teda nemožno vyfarbiť vyhovujúcicm spôsobom.

D2 Je možné vyplniť tabuľku 10×10 číslami 1 a -1 tak, aby v každom riadku bol súčet čísel rovnaký a v každom stĺpci bol iný?

Riešenie:

Áno, pozri obrázok, v ktorom sú ofarbené políčka s číslom 1.



D3 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že v aspoň 9 riadkoch je súčet čísel kladný.

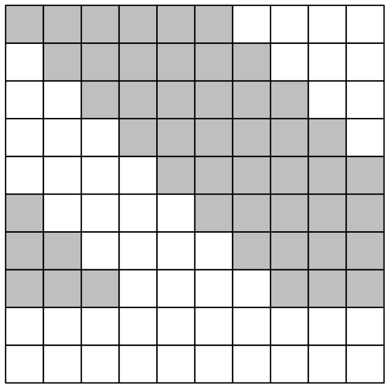
a) Dokážte, že v aspoň jednom stĺpci je súčet čísel kladný.

b) Platí rovnaký záver aj za slabšieho predpokladu, že súčet čísel je kladný v aspoň 8 riadkoch?

Riešenie:

a) Najmenší možný kladný súčet v riadku je 2. Súčet všetkých čísel v tabuľke je teda aspoň $9 \cdot 2 - 10$, čo je kladné číslo. Preto je vylúčené, aby bol súčet čísel v každom stĺpci nekladný.

b) Záver neplatí všeobecne, pozri príklad na obrázku, kde sú ofarbené práve políčka s číslom 1.



D4 Určte, pre ktoré kladné prirodzené čísla n je možné tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 2 a -1 tak, aby súčet všetkých čísel v každom riadku aj každom stĺpci bol rovný 0.

Riešenie:

70. ročník, C, domáce kolo, 2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3473).

D5 Určte, pre ktoré kladné prirodzené čísla n je možné štvorcovú tabuľku $n \times n$, ktorej polia sú ofarbené ako polia šachovnice, vyplniť číslami 2 a -1 tak, že súčasne platí:

- Súčet všetkých čísel v každom riadku aj v každom stĺpci tabuľky je 0.
- Súčet čísel na všetkých čiernych poliach tabuľky sa rovná súčtu čísel na všetkých jej bielych poliach.

Riešenie:

70. ročník, C, krajské kolo, 2 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3605).

D6 CPSJ 2019 (https://omj.edu.pl/cpsj)

Určte, pre ktoré kladné prirodzené čísla n je možné tabuľku $n \times n$ vyplniť číslami 1, 2 a -3 tak, aby súčet čísel v každom riadku aj každom stĺpci bol 0.

Riešenie:

Vyplňme vyhovujúcim spôsobom najskôr prvý riadok tabuľky $n \times n$. To zrejme nie je možné pre n z $\{1, 2\}$; pre n z $\{3, 4, 5\}$ sa to dá: $(1, 2, -3)$, $(1, 1, 1, -3)$ a $(2, 2, 2, -3, -3)$. Ďalej z vyhovujúceho riadku pre dané n získame vyhovujúci riadok pre $n + 3$ pripojením trojice čísel $(1, 2, -3)$. Prvý vyhovujúci riadok tabuľky $n \times n$ tak máme zostrojený pre každé n, kde $n \geq 3$. Z tohto prvého riadku pri danom n teraz ľahko zostrojíme celú vyhovujúcu tabuľku $n \times n$, a to tak, že do každého ďalšieho riadku zostavu čísel z predchádzajúceho riadku „cyklicky posunieme“ o jedno miesto, podobne ako sme to urobili v tabuľke z riešenia úlohy N3.

5

N1 V situácii zo súťažnej úlohy nájdite dve dvojice zhodných uhlov veľkostí menších než 60°.

Riešenie:

Jednu takú dvojicu máme v rovnoramennom trojuholníku DCE: $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DEC|$. Pretože však tieto zhodné uhly majú vyjadrenie $|\sphericalangle DCE| = 60^\circ - |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DEB| = 60^\circ - |\sphericalangle BDE|$ (lebo $|\sphericalangle DBE| = 120^\circ$), je druhou dvojicou $\sphericalangle ACD$ a $\sphericalangle BDE$.

N2 V situácii zo súťažnej úlohy nájdite príklad dvoch trojuholníkov, označme ich $K_1L_1M_1$ a $K_2L_2M_2$, ktoré spĺňajú tieto podmienky: $|L_1M_1| = |L_2M_2|$, $|\sphericalangle K_1M_1L_1| = |\sphericalangle K_2M_2L_2|$ a $|\sphericalangle L_1K_1M_1| + |\sphericalangle L_2K_2M_2| = 180^\circ$. Potom dokážte, že z týchto troch všeobecne zapísaných podmienok plynie rovnosť $|K_1L_1| = |K_2L_2|$.

Riešenie:

Napríklad $K_1 = A$, $L_1 = D$, $M_1 = C$ a $K_2 = B$ $L_2 = E$ $M_2 = D$ (plynie z riešenia úlohy N1).

Dôkaz rovnosti $|K_1L_1| = |K_2L_2|$ je triviálny v prípade, keď $|\sphericalangle L_1K_1M_1| = |\sphericalangle L_2K_2M_2| = 90^\circ$. Ďalej preto predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že $|\sphericalangle L_2K_2M_2| > 90^\circ$. Potom na polpriamke opačnej k polpriamke K_2M_2 existuje taký bod K_2', že $|K_2'L_2| = |K_2L_2|$. Zrejme platí $|\sphericalangle L_2K_2'M_2| = 180^\circ - |\sphericalangle L_2K_2M_2| = |\sphericalangle L_1K_1M_1|$, a tak sa trojuholníky $K_2'L_2M_2$ a $K_1L_1M_1$ zhodujú v dvoch vnútorných uhloch a jednej strane, sú teda zhodné, odkiaľ už plynie $|K_1L_1| = |K_2'L_2|$ čiže $|K_1L_1| = |K_2L_2|$, čo sme mali dokázať. Pre znalcov sínusovej vety dodajme, že tvrdenie úlohy je okamžitým dôsledkom tejto vety použitej pre trojuholníky $K_1L_1M_1$ a $K_2L_2M_2$ s prihliadnutím na vzorec $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

D1 V trojuholníku ABC označme M stred strany BC, N stred ťažnice AM a P priesečník polpriamky BN so stranou AC. Určte pomer $|AP| : |PC|$.

Riešenie 1:

Uvažujme stred S úsečky PC. Potom MS je stredná priečka v $\triangle BCP$, takže $MS \parallel BP$, preto NP je stredná priečka v $\triangle AMS$. Preto platí $|AP| = |PS| = |SC|$, odkiaľ už $|AP| : |PC| = 1 : 2$.

Riešenie 2:

Doplňme trojuholník ABM na rovnobežník $ABMB'$ so stredom N. Potom P je priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABCB'$, takže trojuholníky BCP a $B'AP$ sú podľa vety *uu* podobné, odkiaľ plynie $|AP| : |CP| = |B'A| : |BC| = |BM| : |BC| = 1 : 2$.

Riešenie 3:

Označme B' obraz bodu B v súmernosti so stredom A a K priesečník polpriamky BN s úsečkou $B'C$. Potom AM je stredná priečka v $\triangle B'BC$, takže platí $AM \parallel B'C$. Odtiaľ plynie, že zhodné úsečky AN a NM sú strednými priečkami v $\triangle B'BK$, resp. $\triangle KBC$, a preto sú zhodné aj zodpovedajúce strany $B'K$ a KC, čiže K je stred BC. Bod P tak je priesečník dvoch ťažníc CA, BK trojuholníka $B'BC$, je to teda jeho ťažisko, a preto $|AP| : |PC| = 1 : 2$.

D2 V trojuholníku ABC je bod M stredom strany BC. Bod K leží na ťažnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je priesečník polpriamky CK so stranou AB. Dokážte, že trojuholník AKL je rovnoramenný.

Riešenie:

Doplňme trojuholník ABC na rovnobežník $ABA'C$. Potom platí $|CA'| = |AB| = |CK|$, takže CKA' je rovnoramenný trojuholník s hlavným vrcholom C, preto sú uhly CKA' a CAK' zhodné. Odtiaľ použitím viet o vrcholových a striedavých uhloch už plynie zhodnosť uhlov LKA a LAK, takže trojuholník AKL je skutočne rovnoramenný (s hlavným vrcholom L).

D3 Nech D, E sú postupne stredy strán AB, BC trojuholníka ABC a F je stred úsečky AD. Dokážte, že priamka CD rozpoľuje úsečku EF.

Riešenie:

68. ročník, C, školské kolo, 3 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3047).

D4 V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou BC so stredom D označme M stred ťažnice AD a P pätu kolmice z bodu D na priamku BM. Dokážte, že $AP \perp PC$.

Riešenie:

Doplňme trojuholník ABD na rovnobežník $ABDB'$ so stredom M. Vzhľadom na $|AB'| = |BD| = |DC|$ je $ADCB'$ pravouholník, na ktorého opísanej kružnici vďaka pravému uhlu DPB' leží bod P. Preto je pravý aj uhol APC, ako sme mali dokázať.

D5 Je daný pravidelný päťuholník $ABCDE$, v ktorom M je päta kolmice z vrcholu D na stranu AB. Priesečník osi úsečky DM s priamkou AC označme K. Dokážte, že uhol AKD je pravý.

Riešenie:

Uvažujme bod A' súmerne združený s bodom A vzhľadom na priesečník K. Pretože body A a A' majú od osi úsečky DM rovnakú vzdialenosť, leží bod A' na rovnobežke s priamkou AB, ktorá prechádza vrcholom D. Vďaka tomu je bod C vnútorným bodom úsečky AA', takže uhly $A'AB$ a $A'AD$ sú vlastne uhly CAB, resp. CAD, ktoré oba majú veľkosť 36° (po ľahkom výpočte). Z dokázanej zhodnosti uhlov $A'AB$, $A'AD$ a zo zhodnosti striedavých uhlov $A'AB$, $AA'D$ plynie zhodnosť uhlov $A'AD$ a $AA'D$, takže $AA'D$ je rovnoramenný trojuholník so základňou AA', ktorej stred je práve bod K. Uhol AKD je preto skutočne pravý.

6

N1 Pre prirodzené čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určte všetky možné hodnoty ich súčtu.

Riešenie:

Platí $ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d)$. Pretože $77 = 7 \cdot 11$, $a + c > 1$, $b + d > 1$, nutne $\{a + c, b + d\} = \{7, 11\}$, a teda $a + b + c + d = 18$. Pritom štvorica $(1, 1, 6, 10)$ vyhovuje zadaniu.

N2 Pre prirodzené čísla a, b, c platí $a(a + b + c) + bc = 143$. Určte všetky možné hodnoty $|b - c|$.

Riešenie:

Úpravou máme $a(a+b+c)+bc = a(a+b)+c(a+b) = (a+b)(a+c)$, takže $(a+b)(a+c) = 143 = 11 \cdot 13$, pričom $a + b > 1$ a $a + c > 1$, takže $\{a + b, a + c\} = \{11, 13\}$, odkiaľ $|b - c| = \big|(a + b) - (a + c)\big| = |11 - 13| = 2$. Pritom trojica $(1, 10, 12)$ vyhovuje zadaniu.

D1 CPSJ 2021 (https://skmo.sk/dokumenty.php?rocnik=70)

V každom políčku tabuľky 2×2 je napísané prirodzené číslo. Ak sčítame súčin čísel v prvom stĺpci, súčin čísel v druhom stĺpci, súčin čísel v prvom riadku a súčin čísel v druhom riadku, dostaneme výsledok 2021.

a) Určte všetky možné hodnoty súčtu všetkých štyroch čísel v tabuľke.

b) Nájdite počet tabuliek spĺňajúcich zadanie, ktoré obsahujú štyri navzájom rôzne čísla.

Riešenie:

a) Čísla v tabuľke je možné označiť a, b, c, d tak, že $ab + cd + ac + bd = (a + d)(b + c) = 2021 = 43 \cdot 74$. Odtiaľ plynie $\{a + d, b + c\} = \{43, 47\}$, takže $a + b + c + d = 43 + 47 = 90$.

b) Podľa časti a) rozlíšime dva prípady, a to $a + d = 43$ a $b + c = 47$, resp. $a + d = 47$ a $b + c = 43$. V prvom prípade je možné dvojicu (a, d) zvoliť práve 42 spôsobmi a dvojicu (b, c) práve 46 spôsobmi, v druhom prípade sú tieto počty naopak. Dohromady tak existuje $2 \cdot 42 \cdot 46$ rôznych vyhovujúcich tabuliek, avšak včítane tých, v ktorých sa niektoré dve čísla rovnajú. Ich počet potrebujeme zistiť, aby sme ho potom mohli od celkového počtu odčítať. Pretože 43 a 47 sú nepárne čísla, v každej vyhovujúcej tabuľke platí $a \neq d$ a $b \neq c$. V každej tabuľke s rovnakými číslami preto musí platiť aspoň jedna z rovností $a = b, a = c, d = b, d = c$, pritom vďaka $a+d \neq b+c$ to bude práve jedna z nich (vylúčte dve rovnosti rozborom všetkých možností ich výberu). Každú z týchto štyroch rovností vždy spĺňa 42 vyhovujúcich tabuliek v každom z dvoch rozlíšených prípadov, takže ich celkový počet je $2 \cdot 4 \cdot 42$ čiže $8 \cdot 42$. Hľadaný počet je preto $2 \cdot 42 \cdot 46 - 8 \cdot 42$ čiže 3528.

D2 Na každej stene kocky je napísané kladné prirodzené číslo. Ku každému jej vrcholu je pripísaný súčin troch čísel na priľahlých stenách. Súčet ôsmich čísel pri vrcholoch je 1001. Určte všetky možné hodnoty súčtu čísel na stenách.

Riešenie:

Ak je (a, b) dvojica čísel na prednej a zadnej stene, (c, d) dvojica čísel na hornej a dolnej stene a napokon (e, f) dvojica čísel na ľavej a pravej stene, tak roznásobením súčinu $(a+b)(c+d)(e+f)$ dostaneme osem sčítancov, ktorými sú práve čísla pripísané vrcholom kocky (v každom vrchole sa stýkajú tri steny, po jednej z popísaných troch dvojíc stien). Platí teda $(a+b)(c+d)(e+f) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, odkiaľ $\{a+b, c+d, e+f\} = \{7, 11, 13\}$, takže $a + b + c + d + e + f = 7 + 11 + 13 = 31$.

Existuje pritom aspoň jedna vyhovujúca šestica (a, b, c, d, e, f), a to napríklad $(1, 1, 1, 6, 10, 12)$.

D3 67. ročník, B, domáce kolo, 4 (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=2578)

Určte počet všetkých trojíc prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.

Riešenie:

Pričítajte k obom stranám rovnice číslo 1, aby ste potom ľavú stranu mohli rozložiť na súčin dvoch činiteľov.

D4 Na tabuli je napísaných päť (nie nutne rôznych) prvočísel, ktorých súčin je 105-krát väčší než ich súčet. Určte tieto prvočísla.

Riešenie:

70. ročník, A, domáce kolo, 1, časť a) (http://www.skmo.sk/dokument.php?id=3467).
