MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1 Je možné vyplniť tabuľku $n \times n$ jednotkami a dvojkami tak, aby bol súčet čísel v každom riadku deliteľný piatimi a súčet čísel v každom stĺpci deliteľný siedmimi? Riešte pre prípady

a) $n = 9$,

b) $n = 12$.

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

a) Dokážeme sporom, že žiadne také vyplnenie neexistuje. Pripusťme opak a uvažujme nejaké vyhovujúce vyplnenie tabuľky 9×9. Zamerajme sa na jej ľubovoľný stĺpec. Súčet čísel v tomto stĺpci je aspoň $9 \cdot 1$ čiže 9 a najviac $9 \cdot 2$ čiže 18. Keďže je to podľa predpokladu násobok siedmich, musí byť rovný číslu $2 \cdot 7$ čiže 14 (lebo $1 \cdot 7 = 7 < 9$ a $3 \cdot 7 = 21 > 18$). Súčet čísel v celej tabuľke je preto rovný $9 \cdot 14$ čiže 126. Pretože je v každom riadku súčet čísel deliteľný piatimi, musí byť deliteľný piatimi aj súčet čísel v celej tabuľke. Keďže však číslo 126 čiže $5 \cdot 25 + 1$ piatimi deliteľné nie je, dosiahli sme požadovaný spor.

b) Áno, také vyplnenie existuje. Jeden z možných príkladov je uvedený na obrázku.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

Takto zapísané riešenie je úplné, pre inšpiráciu však ešte popíšeme jeden možný spôsob, ako na taký príklad prísť.

Majme vyhovujúce vyplnenie tabuľky 12×12. V každom riadku je súčet čísel aspoň 12, najviac 24 a súčasne je deliteľný piatimi. Je teda rovný 15 alebo 20, čo zodpovedá zastúpeniu troch alebo ôsmich dvojok. Podobne súčet čísel v každom stĺpci patrí do toho istého rozmedzia 12 až 24 a súčasne je deliteľný siedmimi. Je teda rovný 14 alebo 21, čo zodpovedá zastúpeniu dvoch alebo deviatich dvojok.

Označme r počet riadkov s troma dvojkami a s počet stĺpcov s dvoma dvojkami. Potom celkový počet dvojok v tabuľke môžeme vyjadriť dvoma spôsobmi ako $r \cdot 3 + (12 - r) \cdot 8$ a $s \cdot 2 + (12 - s) \cdot 9$. Z rovnosti týchto dvoch výrazov dostávame rovnicu $7s - 5r = 12$. Jej riešením (jediným vzhľadom na podmienky $r, s \in \{0, 1, \ldots, 12\}$) je dvojica $(6, 6)$. Chceme teda tabuľku vyplniť tak, aby v jednej polovici riadkov boli 3 dvojky, a v druhej polovici ich bolo 8, v jednej polovici stĺpcov boli 2 dvojky a v druhej 9 (na poradí riadkov a stĺpcov zrejme nezáleží).

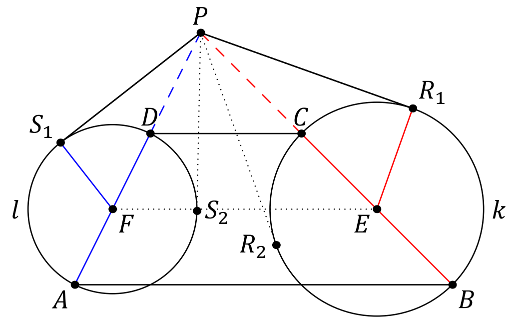
Ponúka sa rozdeliť celú tabuľku 12×12 na štyri podtabuľky 6×6 a každú z nich vyplniť tak, aby v každom riadku i stĺpci obsahovala rovnaký počet dvojok. Jednou z možností je, aby tieto počty dvojok boli rovné 0, 3, 2 a 6 (vzhľadom na to, že počty musia byť v rozmedzí 0 až 6, je to dokonca opäť jediná možnosť). Stačí teda vyplniť jednu podtabuľku celú jednotkami, jednu celú dvojkami a zvyšné dve napríklad ako na obrázku.

2 Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme k a l kružnice s priemermi BC a AD. Ďalej označme P priesečník priamok BC a AD. Dokážte, že dotyčnice z bodu P ku kružnici k zvierajú rovnaký uhol ako dotyčnice z bodu P ku kružnici l.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Stredy E, F zadaných kružníc k, resp. l sú stredy ramien BC, resp. AD (pozri obrázok). Nech R_1, R_2, resp. S_1, S_2 sú body dotykov dotyčníc z bodu P postupne ku kružniciam k, l.



Našou úlohou je dokázať rovnosť $|\sphericalangle R_1PR_2| = |\sphericalangle S_1PS_2|$. Keďže dve dotyčnice vedené z jedného bodu bodu k tej istej kružnici sú súmerne združené podľa spojnice tohto bodu so stredom kružnice (pozri návodnú úlohu 1), platí $|\sphericalangle R_1PR_2| = 2\,|\sphericalangle R_1PE|$ a $|\sphericalangle S_1PS_2| = 2\,|\sphericalangle S_1PF|$. Preto nám stačí dokázať zhodnosť uhlov R_1PE a S_1PF. Tú získame z podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov podľa vety *Ssu*, keď overíme rovnosť dvoch pomerov $|PE| : |ER_1|$ a $|PF| : |FS_1|$.

Predovšetkým, ER_1, EB sú rovné polomeru kružnice k a podobne FS_1, FA sú rovné polomeru kružnice l. Navyše podľa známej vlastnosti strednej priečky lichobežníka (pozri návodnú úlohu 2) v našej situácii máme $FE \parallel AB$, takže trojuholníky PFE a PAB sú podobné podľa vety *uu*, a preto platí $|PE| : |PB| = |PF| : |PA|$, a teda tiež $|PE| : |EB| = |PF| : |FA|$. (V poslednom kroku sme uplatnili užitočné pravidlo, že ak $a/(a+c) = b/(b+d)$, tak $a/c = b/d$. Overte, že platí pre ľubovoľné kladné hodnoty a, b, c, d.) Spojením týchto dvoch pozorovaní už získame, čo sme potrebovali na dokončenie nášho riešenia:

$$\frac{|PE|}{|ER_1|} = \frac{|PE|}{|EB|} = \frac{|PF|}{|FA|} = \frac{|PF|}{|FS_1|}.$$

---

3 Nájdite všetky celé čísla n také, že $n > 2$ a číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Ukážeme, že jediné vyhovujúce n je 4.

Kvôli stručnosti budeme v celom riešení písať „n-tá mocnina“ namiesto „n-tá mocnina celého čísla“. Platí, že kladné celé číslo je n-tou mocninou práve vtedy, keď sa v jeho rozklade na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnine, ktorá je násobkom čísla n. Ak sú teda dve celé čísla n-tými mocninami a ich podiel je celé číslo, musí byť n-tou mocninou i tento podiel. Použitím tohto tvrdenia na n-té mocniny n^n a (podľa zadania úlohy) n^{n-2} dostávame, že aj číslo n^n/n^{n-2} čiže n^2 je n-tou mocninou.

Nižšie dokážeme, že pre každé celé n také, že $n \geq 5$, platí $1^n < n^2 < 2^n$, takže pre žiadne také n nemôže číslo n^2 byť n-tou mocninou – muselo by totiž ísť o n-tú mocninu so základom ležiacim medzi číslami 1 a 2. Každé n vyhovujúce zadaniu úlohy tak nutne spĺňa nerovnosť $n < 5$. Pre zvyšných kandidátov z $\{3, 4\}$ číslo n^{n-2} otestujeme priamo: $3^{3-2} = 3$, čo nie je tretia mocnina, a $4^{4-2} = 16 = 2^4$, čo požadovaná štvrtá mocnina skutočne je.

Ostáva dokázať $1^n < n^2 < 2^n$ pre každé celé n také, že $n \geq 5$. Prvá nerovnosť je zrejmá (dokonca pre každé n také, že $n > 1$), dôkaz druhej urobíme matematickou indukciou:

1) $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

2) Predpokladajme, že pre nejaké n také, že $n \geq 5$, platí $n^2 < 2^n$, a dokazujme, že potom platí aj $(n+1)^2 < 2^{n+1}$. Z predpokladanej nerovnosti $n^2 < 2^n$ po vynásobení oboch strán číslom 2 dostaneme $2n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, takže požadovaná nerovnosť $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ bude dokázaná, ak ukážeme, že $(n+1)^2 < 2n^2$ čiže $2n^2 - (n+1)^2 > 0$. To je však ľahké, dokonca pre každé n také, že $n \geq 3$, máme

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0.$$

(Z nášho postupu vidíme, že implikácia z 2. indukčného kroku platí dokonca pre každé n také, že $n \geq 3$. Dokazovaná nerovnosť $n^2 < 2^n$ však neplatí ani v prípade $n = 3$ ani v prípade $n = 4$, takže v 1. indukčnom kroku sme museli začať až od čísla 5.)

Poznámka:

V prvej časti riešenia môžeme postupovať s malou obmenou bez úvahy o čísle n^2, keď zapíšeme rovnicu $n^{n-2} = k^n$ s neznámymi celými číslami n, kde $n > 2$, a k, kde $k > 1$. V prípade nepárneho n sú exponenty $n-2$ a n nesúdeliteľné čísla, a tak z úvahy o prvočiniteľoch plynie, že samo číslo n je n-tá mocnina, čo ďalej vylúčime nerovnosťou $n < 2^n$. V prípade párneho n z upravenej rovnice $n^{\frac{n}{2}-1} = k^{\frac{n}{2}}$ opäť vďaka nesúdeliteľnosti zastúpených exponentov vyplýva, že číslo n je $\frac{n}{2}$-tou mocninou, čo pre n také, že $n > 4$, ďalej vylúčime nerovnosťou $n < 2^{\frac{n}{2}}$, ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $n^2 < 2^n$ z predvedeného riešenia.

---

4 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$xy + 1 = z^2,$$
$$yz + 2 = x^2,$$
$$zx + 3 = y^2.$$

(Tomáš Jurík)

Riešenie 1:

Odčítaním druhej rovnice od prvej a drobnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} y(x-z) - 1 &= (z-x)(z+x), \\ -1 &= (z-x)(z+x+y). \end{aligned}$$

Obdobnou úpravou rozdielu druhej a tretej rovnice získame

$$\begin{aligned} z(y-x) - 1 &= (x-y)(x+y), \\ -1 &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

Z ktorejkoľvek z oboch získaných rovníc plynie $x + y + z \neq 0$, takže je môžeme obe výrazom $x + y + z$ vydeliť a potom ich porovnaním dostať

$$z - x = \frac{-1}{x+y+z} = x - y.$$

Nech $d = z - x = x - y$. Potom $z = x + d$ a $y = x - d$, takže všetky riešenia pôvodnej sústavy sú tvaru $(x, x-d, x+d)$. Dosaďme také y a z do jednotlivých rovníc.

Dosadením do druhej rovnice získame $(x-d)(x+d) + 2 = x^2$, čiže $d^2 = 2$, t. j. $d \in \{\pm\sqrt{2}\}$. Dosadenie do prvej a tretej rovnice s následným využitím výsledku $d^2 = 2$ zapíšeme do dvoch stĺpcov vedľa seba:

$$\begin{aligned} x(x-d) + 1 &= (x+d)^2, \\ 1 &= d^2 + 3xd, \\ 3xd &= -1. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (x+d)x + 3 &= (x-d)^2, \\ 3xd &= d^2 - 3, \\ 3xd &= -1. \end{aligned}$$

Ak $d = \sqrt{2}$, tak vyjde $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{6}\sqrt{2}$, a ak $d = -\sqrt{2}$, tak $x = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$. Dopočítaním hodnôt $y = x - d$, $z = x + d$ získame (jediné) dve riešenia úlohy, ktorými sú trojice

$$\left(-\frac{1\sqrt{2}}{6}, -\frac{7\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right), \left(\frac{1\sqrt{2}}{6}, \frac{7\sqrt{2}}{6}, -\frac{5\sqrt{2}}{6}\right).$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že vyhovujúce aj zadaniu.

Poznámka:

Rovnaký medzivýsledok $(x, x-d, x+d)$ je možné tiež dosiahnuť porovnaním dvoch rozdielov iných dvojíc rovníc. Napríklad porovnaním rovností $-1 = (x-y)(x+y+z)$ a $-2 = (z-y)(x+y+z)$ vyjde $z - y = 2(x-y)$.

Riešenie 2:

Ak vynásobíme tri zadané rovnice postupne číslami x, y, z a všetky ich potom sčítame, zmiešané členy tretieho stupňa sa vo výslednom súčte navzájom zrušia:

$$\begin{aligned} x(xy+1) + y(yz+2) + z(zx+3) &= x \cdot z^2 + y \cdot x^2 + z \cdot y^2, \\ x + 2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

To isté sa stane, ak zadané rovnice vynásobíme postupne číslami y, z, x:

$$\begin{aligned} y(xy+1) + z(yz+2) + x(zx+3) &= y \cdot z^2 + z \cdot x^2 + x \cdot y^2, \\ 3x + y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že každé riešenie pôvodnej sústavy je nutne riešením sústavy dvoch lineárnych rovníc (s troma neznámymi)

$$x + 2y + 3z = 0,$$
$$3x + y + 2z = 0.$$

Riešenie takej sústavy (vysvetlite sami, prečo k tejto sústave dvoch rovníc nemá zmysel pripájať tretiu lineárnu rovnicu $2x - y - z = 0$, ktorá zodpovedá medzivýsledku $(x, x - d, x + d)$ z riešenia 1) popíšeme pomocou jedného parametra: Napríklad odčítaním prvej rovnice od dvojnásobku tej druhej vylúčime neznámu y a vyjde

$$0 = 2(3x + y + 2z) - (x + 2y + 3z) = 5x + z,$$

teda $z = -5x$. Podobne vylúčime neznámu z a získame

$$0 = 3(3x + y + 2z) - 2(x + 2y + 3z) = 7x - y,$$

teda $y = 7x$. Všetky riešenia odvodenej lineárnej sústavy sú teda trojice tvaru $(x, 7x, -5x)$ s ľubovoľným reálnym číslom x. Dosadením takej trojice do pôvodnej sústavy vyjde sústava

$$\begin{aligned} 7x^2 + 1 &= 25x^2, \\ -35x^2 + 2 &= x^2, \\ -5x^2 + 3 &= 49x^2, \end{aligned}$$

ktorej všetky rovnice sú ekvivalentné s rovnakou rovnicou $18x^2 = 1$, ktorá má korene $\pm\sqrt{2}/6$. Dochádzame tak k rovnakému záveru ako v riešení 1: Sústavu zo zadania spĺňajú práve dve trojice

$$\left(-\frac{1\sqrt{2}}{6}, -\frac{7\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right), \left(\frac{1\sqrt{2}}{6}, \frac{7\sqrt{2}}{6}, -\frac{5\sqrt{2}}{6}\right).$$

Riešenie 3:

Na získanie riešenia zadanej sústavy rovníc využijeme štandardnú dosadzovaciu metódu, i keď pritom uplatníme menej štandardné obraty (nižšie zdôraznené *kurzívou*).

Najskôr ukážeme, že žiadna z neznámych x, y, z sa nemôže rovnať nule. Keby napríklad platilo $y = 0$, z prvých dvoch rovníc sústavy by sme dostali $z \in \{\pm 1\}$ a $x \in \{\pm\sqrt{2}\}$. Tieto hodnoty však nespĺňajú tretiu rovnicu $xz + 3 = 0$. Podobne sa vylúčia prípady $x = 0$ a $z = 0$.

Vďaka odvodenej podmienke $xyz \neq 0$ môžeme neznámu x vyjadriť z prvej a tretej rovnice:

$$\frac{z^2 - 1}{y} = x = \frac{y^2 - 3}{z}.$$

Dosaďme *oba krajné zlomky* do pravej strany zvyšnej (druhej) rovnice a upravujme:

$$\begin{aligned} yz + 2 &= \frac{z^2 - 1}{y} \cdot \frac{y^2 - 3}{z}, \\ y^2z^2 + 2yz &= (z^2 - 1)(y^2 - 3), \\ y^2 + 2yz + 3z^2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Elimináciou neznámej x sme teda pre neznáme y a z obdržali sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 1}{y} &= \frac{y^2 - 3}{z}, \\ y^2 + 2yz + 3z^2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Jej riešenie začneme tak, že *oba dôsledky* druhej rovnice $y^2 - 3 = -(3z^2 + 2yz)$ a $z^2 - 1 = -\frac{1}{3}(y^2 + 2yz)$ dosadíme do čitateľov zlomkov z prvej rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} -\frac{y^2 + 2yz}{3y} &= -\frac{3z^2 + 2yz}{z}, \\ y + 2z &= 3(3z + 2y), \\ 5y + 7z &= 0. \end{aligned}$$

Platí teda $y = 7t$ a $z = -5t$ pre vhodné reálne číslo t. Dosadením do druhej rovnice odvodenej sústavy pre neznáme y a z dostaneme pre neznámu t rovnicu $49t^2 - 70t^2 + 75t^2 - 3 = 0$ čiže $18t^2 = 1$. Táto rovnica má korene $\pm\sqrt{2}/6$. Zo vzťahov $y = 7t$ a $z = -5t$ v oboch prípadoch ľahko vyjadríme y a z a následne zo vzťahu $x = \frac{y^2-3}{z}$ aj x, a tak (samozrejme, po skúške) k trojiciam

$$\left(-\frac{1\sqrt{2}}{6}, -\frac{7\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right), \left(\frac{1\sqrt{2}}{6}, \frac{7\sqrt{2}}{6}, -\frac{5\sqrt{2}}{6}\right).$$

---

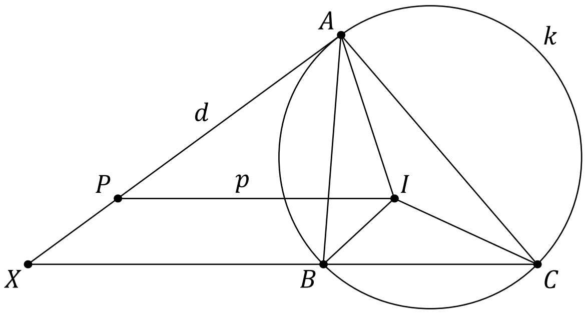
5 Označme I stred kružnice vpísanej do rôznostranného trojuholníka ABC a k kružnicu jemu opísanú. Polpriamky BI a CI pretnú kružnicu k postupne v bodoch S_b a S_c, pričom $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokážte, že dotyčnica ku kružnici k v bode A, priamka vedená bodom I rovnobežne so stranou BC a priamka S_bS_c sa pretínajú v jednom bode.

(Patrik Bak)

Riešenie:

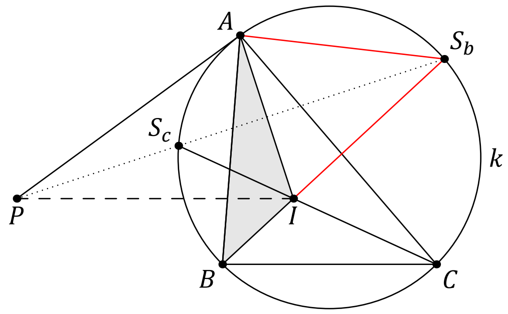
Podľa zadania je trojuholník ABC rôznostranný. Budeme bez ujmy na všeobecnosti ďalej predpokladať, že platí $|AB| < |AC|$. V prípade $|AB| > |AC|$ totiž stačí vymeniť označení vrcholov B a C – taká zmena nemá na dokazované tvrdenie vplyv.

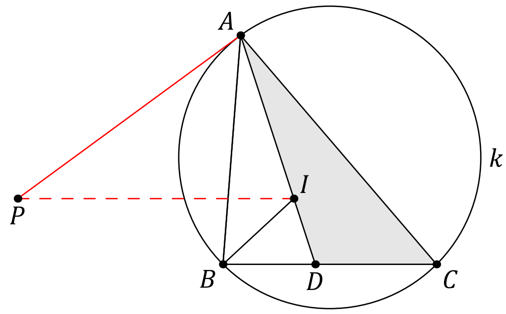
Označme P priesečník dvoch priamok zo zadania: dotyčnice d ku kružnici k v bode A a priamky p vedenej bodom I rovnobežne so stranou BC. Vysvetlime najprv, prečo priesečník P vôbec existuje a prečo leží v polrovine opačnej k polrovine ABC, ako je to na obrázku.



Z predpokladu $|AB| \neq |AC|$ plynie, že dotyčnica d a sečnica BC kružnice k nie sú rovnobežné. Pretínajú sa teda v bode, ktorý označíme X a ktorý je vďaka upresneniu $|AB| < |AC|$ vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke BC. Pretože rovnobežka p s priamkou BC prechádza vnútorným bodom I trojuholníka ABC, jej priesečník P s dotyčnicou d existuje a leží vnútri úsečky AX. Bod P preto navyše – rovnako ako bod X – skutočne leží v polrovine opačnej k polrovine ABC.

Venujme sa už teraz zadanej úlohe. Iste ju splníme, keď overíme, že zadané body S_b a S_c ležia na osi úsečky AI a že na tejto osi leží i nami zvolený priesečník P.





Zamerajme sa najskôr na bod S_b. Chceme dokázať $|S_bA| = |S_bI|$, t. j. overiť, že trojuholník S_bAI je rovnoramenný so základňou AI. To je pomerne známe tvrdenie (ďalej uvedené v návodnej úlohe N2), ktoré kvôli úplnosti teraz dokážeme.

Pri štandardnom značení veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC podľa obrázku vľavo platí

$$|\sphericalangle S_bAI| = |\sphericalangle S_bAC| + |\sphericalangle CAI| = |\sphericalangle S_bBC| + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Rovnakú veľkosť má aj druhý uhol AIS_b pri základni AI, ktorý je vonkajším uhlom trojuholníka ABI, a preto

$$|\sphericalangle AIS_b| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Skutočne teda platí $|S_bA| = |S_bI|$.

Vzhľadom na symetriu platí aj požadovaná vlastnosť druhého bodu S_c, a to rovnosť $|S_cA| = |S_cI|$.

Aj pre tretí bod P k dôkazu požadovanej rovnosti $|PA| = |PI|$ uvážime vnútorné uhly trojuholníka PAI pri základni AI a využijeme tentokrát obrázok vpravo. Fakt, že jedna z priamok určujúcich bod P je dotyčnica kružnice k, nám umožňuje využiť *vetu o úsekovom uhle* (pozri návodnú úlohu N4). Podľa nej je úsekový uhol PAB zhodný s obvodovým uhlom ACB. (To je korektný záver, ak priamka AB body P a C oddeľuje, čo podľa úvodnej časti nášho riešenia skutočne platí vďaka predpokladu $|AB| < |AC|$.) Preto platí

$$|\sphericalangle PAI| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle BAI| = |\sphericalangle ACB| + \frac{\alpha}{2} = \gamma + \frac{\alpha}{2}.$$

Na požadované vyjadrenie druhého uhla PIA využijeme to, že $PI \parallel BC$. Označme ešte D priesečník polpriamky AI so stranou BC. Zo zhodnosti súhlasných uhlov AIP, ADB (tu využívame to, že úsečka IP pretína stranu AB (a nie stranu AC)) a vďaka faktu, že ADB je vonkajším uhlom trojuholníka ADC, máme

$$|\sphericalangle AIP| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ACB| = \frac{\alpha}{2} + \gamma.$$

A sme hotoví.

Poznámka:

Znovu ukážeme, že oba body S_b, S_c ležia na osi úsečky AI, a to kratším postupom, pri ktorom sa zaobídeme bez počítania uhlov.

Iste stačí dokázať, že trojuholníky AS_bS_c a IS_bS_c sú zhodné podľa vety *usu*. Predovšetkým, S_bS_c je ich spoločná strana. K nej priľahlé uhly AS_bS_c a IS_bS_c sú zhodné ako obvodové uhly, ktoré prislúchajú zhodným oblúkom AS_c a S_cB kružnice k. Rovnako tak nahliadneme aj zhodnosť druhých dvoch priľahlých uhlov AS_cS_b a IS_cS_b (vďaka zhodným oblúkom AS_b a S_bC kružnice k).

---

6 Uvažujme nekonečnú postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ celých čísel takú, že $a_0 \geq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pre všetky nezáporné indexy n. Dokážte, že táto postupnosť obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Dokážeme sporom, že taká postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nemôže obsahovať len konečne veľa zložených čísel. Pripusťme, že ich je len konečne veľa. Potom od určitého člena a_m včítane obsahuje postupnosť už len prvočísla. Keďže postupnosť je vďaka svojmu zadaniu všade rastúca (z $t \geq 2$ totiž plynie $2t + 1 > 2t - 1 > t$), môžeme navyše bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že pre vybraný index m už platí $a_m \geq 5$, a teda tiež $a_n \geq 5$ pre všetky n také, že $n \geq m$.

Najprv si uvedomme, že na to, aby medzi číslami a_n takými, že $a_n \geq 5$, s indexmi n takými, že $n \geq m$, nebol žiadny násobok troch (inak by také a_n nebolo prvočíslo), musí buď pre všetky také n platiť $a_{n+1} = 2a_n + 1$, alebo musí pre všetky také n platiť $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Skutočne, samo prvočíslo a_m vďaka predpokladu $a_m \geq 5$ nie je deliteľné tromi, takže máme dve možnosti:

- a_m dáva zvyšok 1 po delení tromi.

  Ak a_n dáva zvyšok 1 po delení tromi, tak číslo $2a_n + 1$ je deliteľné tromi. Musíme preto mať $a_{n+1} = 2a_n - 1$, čo je prvočíslo, ktoré dáva opäť zvyšok 1 po delení tromi. Matematickou indukciou sme tak dokázali, že $a_{n+1} = 2a_n - 1$ pre každé n také, že $n \geq m$.
- a_m dáva zvyšok 2 po delení tromi.

  Ak a_n dáva zvyšok 2 po delení tromi, tak číslo $2a_n - 1$ je deliteľné tromi. Musíme preto mať $a_{n+1} = 2a_n + 1$, čo je prvočíslo, ktoré dáva opäť zvyšok 2 po delení tromi. Matematickou indukciou sme tak dokázali, že $a_{n+1} = 2a_n + 1$ pre každé n také, že $n \geq m$.

Ostáva teda vyriešiť dva prípady:

- Pre každé n také, že $n \geq m$, platí $a_{n+1} = 2a_n - 1$.
- Pre každé n také, že $n \geq m$, platí $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

V oboch prípadoch dôjdeme k sporu tak, že nájdeme člen a_n, kde $n > m$, ktorý je násobkom prvočísla a_m, a nie je tak prvočíslom. Kvôli prehľadnosti ďalších zápisov označíme a_m premennou p. Zopakujme, že $p \geq 5$, a teda p je nepárne.

Zamerajme sa najprv na prípad 1, prípad 2 neskôr vyriešime obdobne.

V prípade 1 postupným dosadzovaním dostávame

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 2p - 1, \\ a_{m+2} &= 2 \cdot (2p - 1) - 1 = 4p - 3, \\ a_{m+3} &= 2 \cdot (4p - 3) - 1 = 8p - 7. \end{aligned}$$

Matematickou indukciou dokážeme, že $a_{m+i} = 2^i \cdot (p-1) + 1$ pre každé i také, že $i \geq 0$. (O inom určení vzorcov pre a_{m+i} v prípadoch 1 a 2 pozri metódu z návodnej úlohy N2.) Skutočne, ak $i = 0$, tak rovnosť platí, a ak platí pre niektoré i také, že $i \geq 0$, tak platí aj pre $i + 1$, lebo

$$a_{m+i+1} = 2 \cdot (2^i \cdot (p-1) + 1) - 1 = 2^{i+1}(p-1) + 1.$$

Teraz voľbou $i = p - 1$ a použitím malej Fermatovej vety (pozri návodnú úlohu N5), podľa ktorej $p \mid \left(2^{p-1} - 1\right)$, lebo p je nepárne prvočíslo, dostaneme

$$a_{m+p-1} = 2^{p-1}(p-1) + 1 \equiv 1 \cdot (p-1) + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

čo je avizovaný spor $a_m \mid a_{m+p-1}$ (pripomeňme, že $p = a_m$).

V prípade 2 úplne obdobne dokážeme vzťah $a_{m+i} = 2^i \cdot (p+1) - 1$ pre každé i také, že $i \geq 0$. Opätovnou voľbou $i = p - 1$ a rovnakým použitím malej Fermatovej vety dostaneme

$$a_{m+p-1} = 2^{p-1}(p+1) - 1 \equiv (p+1) - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

čo je rovnaký spor ako v prípade 1.

Riešenie 2:

Ukážeme iný spôsob, ako vyriešiť prípad 1, a to bez hľadania vzorca pre a_{m+i} a následného použitia malej Fermatovej vety. Aj teraz dôjdeme k takému sporu, že medzi členmi a_n (kde $n > m$) sa vyskytuje násobok člena a_m. Rovnaký sporný záver sa v prípade 2 odvodí analogicky. (Využije sa na to zobrazenie $z \mapsto 2z + 1$ namiesto zobrazenia $z \mapsto 2z - 1$.)

Sledujme, aké zvyšky dávajú členy postupnosti $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ po delení nepárnym prvočíslom a_m, ktoré označíme p. Ak nejaký člen a_n dáva zvyšok z, nasledujúci člen a_{n+1} dáva vďaka rovnosti $a_{n+1} = 2a_n - 1$ zvyšok $2z - 1 \pmod{p}$.

Kľúčové pozorovanie je, že pre nepárne p je zobrazenie $z \mapsto 2z - 1 \pmod{p}$ prosté na množine $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ všetkých možných zvyškov po delenie p, teda že pre ľubovoľné rôzne z_1 a z_2 z $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ platí $2z_1 - 1 \pmod{p} \neq 2z_2 - 1 \pmod{p}$: Skutočne, ak $2z_1 - 1 \pmod{p} = 2z_2 - 1 \pmod{p}$, tak

$$p \mid (2z_1 - 1) - (2z_2 - 1) = 2(z_1 - z_2),$$

a keďže p je nepárne, plynie z toho $p \mid z_1 - z_2$, čo znamená $z_1 = z_2$.

Keďže možných zvyškov po delení číslom p je len konečne veľa (konkrétne p), musí sa v postupnosti zvyškov členov ($a_m \pmod{p}, a_{m+1} \pmod{p}, a_{m+2} \pmod{p}, \dots$) niektorý zvyšok zopakovať. Tvrdíme, že prvý opakujúci sa zvyšok je práve zvyšok 0 prvého člena a_m čiže p: Skutočne, keby prvými opakujúcimi sa zvyškmi boli až zvyšky dvojice a_{m+i}, a_{m+j} pre nejaké i a j také, že $1 \leq i < j$, boli by a_{m+i-1}, a_{m+j-1} dva členy s rôznymi zvyškami, ktorých nasledovníci však dávajú rovnaký zvyšok. To je však v spore s dokázaným kľúčovým pozorovaním. Tým je požadovaná existencia indexu n väčšieho než m s vlastnosťou $a_m \mid a_n$ dokázaná.