MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh školského kola kategórie A

1 Nájdite najväčšie celé číslo d, pre ktoré možno tabuľku 43×47 vyplniť jednotkami a dvojkami tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol deliteľný číslom d. (Dokážte tiež, že žiadne väčšie číslo d zadaniu úlohy nevyhovuje.)

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

V prvej časti riešenia dokážeme, že v prípade $d = 47$ požadované vyplnenie tabuľky existuje: Zapíšme do každého riadku všetkých 47 čísel rovnakých, a to do 39 riadkov jednotky a do zvyšných 4 riadkov dvojky:

	1	1	1	1	1	⋯	1
39	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	1	1	1	1	1	⋯	1
	2	2	2	2	2	⋯	2
4	2	2	2	2	2	⋯	2
	2	2	2	2	2	⋯	2
	2	2	2	2	2	⋯	2

47

Potom súčet čísel v každom riadku je 47 alebo $2 \cdot 47$ a súčet čísel v každom stĺpci je $39 \cdot 1 + 4 \cdot 2$ čiže 47, čo sú všetko násobky čísla 47.

V druhej časti riešenia dokážeme sporom, že ak $d > 47$, tak požadované vyplnenie neexistuje. Pripusťme naopak, že tabuľku 43×47 máme vyplnenú jednotkami a dvojkami tak, že pre nejaké také d je súčet čísel v každom riadku aj každom stĺpci násobkom čísla d. Keďže každý z týchto súčtov je kladný a nanajvýš rovný $2 \cdot 47$, a teda menší ako $2d$, musí byť tento násobok čísla d rovný priamo číslu d. Sčítaním všetkých čísel tabuľky po riadkoch tak dôjdeme k hodnote $43d$, zatiaľ čo pri sčítaní po stĺpcoch dostaneme hodnotu $47d$. Musí teda platiť $43d = 47d$, čo je hľadaný spor.

Poznámka:

Podané riešenie možno zrejmým spôsobom zovšeobecniť na dôkaz výsledku, že pre každú tabuľku $m \times n$, pričom $m < n \leq 2m$, je najväčšie vyhovujúce d rovné číslu n.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz prvej časti (konštrukcia pre prípad $d = 47$) a 4 body za dôkaz druhej časti (dôkaz nemožnosti pre každé d väčšie ako 47). Z prvej časti možno získať 1 bod za vyhovujúcu konštrukciu pre niektoré celé d, $1 < d < 47$. Z druhej časti možno získať 1 bod za dôkaz nemožnosti pre každé d také, že $d \geq 86$. Za uhádnutie správneho d dajte 1 bod, ak nie je dosiahnutý žiadny z vyššie uvedených ziskov.

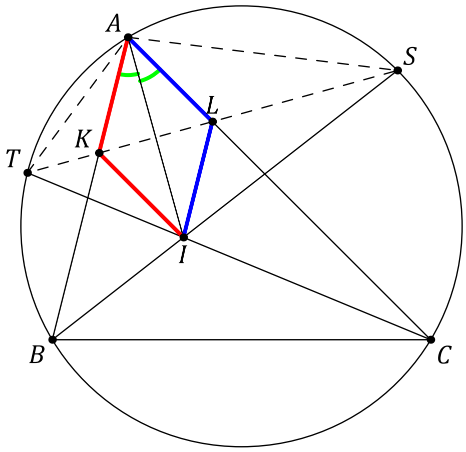
2 Označme I stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Priamky BI, CI pretnú kružnicu opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch S a T, pričom $S \neq B$ a $T \neq C$. Úsečka ST pretína strany AB, AC v bodoch K, L. Dokážte, že štvoruholník $AKIL$ je kosoštvorec (prípadne štvorec).

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Z návodnej úlohy N3 k 5. úlohe domáceho kola vieme, že priamka ST je osou úsečky AI. (Tento známy poznatok teda nemusia riešitelia dokazovať. Pripomeňme len, že vyplýva zo zhodnosti trojuholníkov ATS a ITS podľa vety *usu*: Majú totiž spoločnú stranu ST a uhly ATS, ITS sú zhodné, rovnako ako uhly AST, IST – ide totiž o obvodové uhly v kružnici opísanej ABC prislúchajúce zhodným oblúkom AS, CS, resp. zhodným oblúkom AT, BT.)

Platí preto $|KA| = |KI|$ a $|LA| = |LI|$, ako je to vyznačené na obrázku.

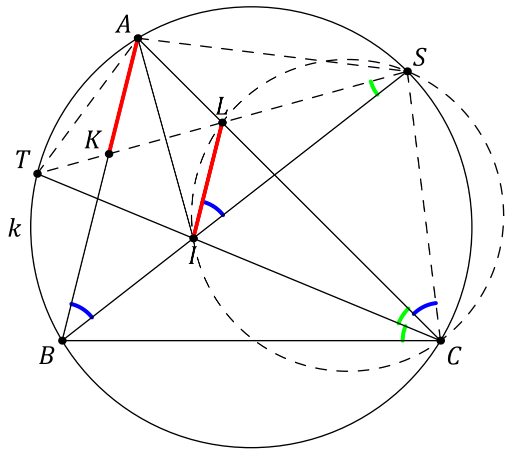


Štvoruholník $AKIL$ je teda súmerný podľa svojej uhlopriečky KL. Keďže však jeho druhá uhlopriečka AI rozpoľuje uhol KAL, musí to byť kosoštvorec (prípadne jeho špeciálny prípad štvorec). (Tento zrejmý záver nemusia riešitelia dokazovať, napriek tomu jeho dôkaz uvedieme: Rovnoramenné trojuholníky AIK a AIL sú zhodné, lebo majú pri spoločnej základni AI zhodné vnútorné uhly KAI a LAI. Z toho vyplýva, že štvoruholník $AKIL$ má zhodné všetky štyri strany.)

Riešenie 2:

Dokážeme, že konvexný štvoruholník $AKIL$ má protiľahlé strany rovnobežné. Že je to nielen rovnobežník, ale dokonca kosoštvorec, potom ako v prvom riešení zrejme vyplynie z toho, že jeho uhlopriečka AI leží na osi jeho vnútorného uhla pri vrchole A. (Zo zhodnosti uhlov KAI a LAI potom totiž dostaneme, že sú s nimi zhodné aj striedavé uhly LIA, resp. KIA, takže oba trojuholníky AIK a AIL sú naozaj rovnoramenné so spoločnou základňou AI. Ani toto zrejmé vysvetlenie nemusia riešitelia zapisovať.)

Z dvoch rovnobežností $AK \parallel LI$ a $AL \parallel KI$ dokážeme iba tú prvú v podobe $AB \parallel LI$; druhá rovnobežnosť $AL \parallel KI$ sa dokáže úplne analogicky. Postup založíme na vlastnostiach obvodových uhlov. V kružnici k opísanej trojuholníku ABC tak majú rovnakú veľkosť $\frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$ nielen uhly ACT a TCB, ale aj uhol TSB.



Prvý a tretí z nich sú však uhly LCI a LSI, takže vďaka ich zhodnosti je štvoruholník $LICS$ tetivový – jemu opísaná kružnica je na obrázku vykreslená. V nej je obvodový uhol LIS zhodný s uhlom LCS, čo je vlastne obvodový uhol ACS v kružnici k, ktorý je zhodný s uhlom ABS. Zistili sme tak, že úsečky LI a AB zvierajú s priamkou BS zhodné súhlasné uhly, a sú preto rovnobežné, ako sme potrebovali dokázať.

(Namiesto priamky BS sme mohli uvážiť aj priamku AC: $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle ISC| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BAC|$.)

Poznámka:

Záverečným krokom oboch riešení boli úvahy o druhej uhlopriečke AI štvoruholníka $AKIL$. Tie možno nahradiť dôkazom rovnosti $|KA| = |LA|$, ktorý teraz uvedieme: Stačí ukázať, že sú zhodné uhly AKL a ALK, na ktoré sa pozrieme ako na vonkajšie uhly trojuholníkov AKT, resp. ALS. Pre ich vnútorné uhly však platí $|\sphericalangle ATK| = |\sphericalangle ATS| = |\sphericalangle ABS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$, $|\sphericalangle TAK| = |\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle TCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA|$ a analogicky $|\sphericalangle ASL| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle SAL| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$. Uhly AKL a ALK tak majú tú istú veľkosť $\frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| + \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA|$.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. V neúplných riešeniach dajte čiastkové body za nasledujúce poznatky (*dokázané*, ak sa na ne nevzťahuje posledný odsek pokynov):

- Uhlopriečka AI leží na osi uhla KAL – 0 bodov.
- Rovnosť $|KA| = |LA|$ (zo záverečnej poznámky) – 2 body.
- Rovnosti $|KA| = |KI|$ a $|LA| = ||LI|$ – za jedinú 3 body, za obe 4 body (aj pri konštatovaní, že štvoruholník $AKIL$ je súmerný podľa svojej uhlopriečky KL).
- Rovnobežnosti $AK \parallel LI$ a $AL \parallel KI$ – za jedinú 3 body, za obe 4 body.
- Štvoruholník $LICS$ (prípadne $LIBT$, prípadne oba) je tetivový – 2 body.

Čiastočné zisky za tieto položky *sa nedajú* sčítať, t. j. počíta sa najväčší z nich.

V poznámkach v zátvorkách sme uviedli, ktoré poznatky možno prehlásiť za známe alebo zrejmé. Platí to aj pre ďalšie poznatky z riešenia návodných a dopĺňajúcich úloh k domácemu kolu, ak sa na ne riešiteľ odvolá.

---

3 Určte všetky dvojice kladných celých čísel a a b, pre ktoré platí $a^{a-b} = b^a$.

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Po vynásobení zadanej rovnosti číslom a^b/b^a dostaneme $(a/b)^a = a^b$. Mocnina na ľavej strane je celočíselná práve vtedy, keď je jej základ a/b celé (v našom prípade kladné) číslo. (Toto zrejmé tvrdenie nemusia riešitelia dokazovať. Vyplýva z toho, že ak má zlomok a/b po skrátení základný tvar u/v, je každá jeho mocnina $(a/b)^n$ zlomkom so základným tvarom u^n/v^n.) Toto číslo označme k. Po dosadení $a = kb$ sa zmení prepísaná rovnosť na tvar $k^{kb} = (kb)^b$, odkiaľ po vydelení exponentov číslom b dostaneme $k^k = kb$ čiže $b = k^{k-1}$, t. j. $a = kb = k^k$. Všetky hľadané dvojice (a, b) sú preto tvaru (k^k, k^{k-1}), pričom k je ľubovoľné kladné celé číslo. Skúška vzhľadom na ekvivalentné úpravy nie je nutná.

Poznámka:

Ukážeme, ako kľúčový poznatok o tom, že číslo a je násobkom čísla b, možno získať aj bez prepisu zadanej rovnosti na tvar so zlomkom a/b. Využijeme na to predpoklad, že čísla a a b sú základy sebe rovných mocnín a^{a-b} a b^a, pre ktorých exponenty platí $a - b < a$. (Zatiaľ čo nerovnosť $b \leq a$ je za takéhoto predpokladu zrejmá (väčší exponent znamená menší základ), menej zrejmý vzťah $b \mid a$ je nutné v riešení dokázať.) Označme počty výskytov ľubovoľného prvočísla p v rozkladoch čísel a, b na súčin prvočísel. Máme vlastne ukázať, že pre tieto počty platí nerovnosť $b_p \leq a_p$. Porovnaním výskytov prvočísla p na oboch stranách rovnosti $a^{a-b} = b^a$ získame vzťah $(a - b) \cdot a_p = a \cdot b_p$. Z toho v prípade $a_p = 0$ máme aj $b_p = 0$; v prípade $a_p > 0$ potom dostávame $b_p/a_p = 1 - b/a < 1$. Tým je želaná nerovnosť $b_p \leq a_p$ dokázaná.

Riešenie 2:

Označme d najväčší spoločný deliteľ čísel a a b. Potom $a = pd$ a $b = qd$, pričom p a q sú nesúdeliteľné kladné celé čísla. Dosadením do zadanej rovnosti a následnými ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme:

$$(pd)^{(p-q)d} = (qd)^{pd},$$
$$(pd)^{p-q} = (qd)^p,$$
$$p^{p-q} = q^p \cdot d^q.$$

Keďže $p \geq 1$, činiteľ z pravej strany poslednej rovnosti je násobkom q, takže násobkom q je aj celočíselná mocnina p^{p-q} z ľavej strany. Tá je však súčasne s číslom q nesúdeliteľná, lebo taký je jej základ p. Preto nutne $q = 1$. Dosadením do upravenej rovnosti dostaneme $p^{p-1} = d$, takže všetky riešenia sú tvaru $a = pd = p^p$ a $b = qd = p^{p-1}$, pričom p je ľubovoľné celé kladné číslo.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho:

a) 1 bod za správny popis *všetkých* riešení (aj bez dôkazu, uhádnutím či experimentovaním),
b) 1 bod za poznatok (aj bez dôkazu), že a je násobkom b (resp. že $q = 1$ pri označení z druhého riešenia), ďalšie 2 body za jeho dôkaz,
c) 2 body za postup vedúci od poznatku z bodu b) k opisu z bodu a)

Body za tieto položky možno sčítať. Za chýbajúcu skúšku body nestrhávajte.

Slovenská komisia MO, ÚI PF UPJ©, Jesenná 5, 040 01 Košice

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Bárta, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Radek Horenský, David Hruška, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Jakub Löwit, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Pavel Šalom, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Martin Melicher, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydala: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021