

### 63. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2021/2022

#### Katégoria A

Domáce kolo – riešenie úloh

#### 1) Šikmý vrh

Riešenie:

Pre riešenie úlohy použijeme sústavu vzťahov pre súradnice a zložky rýchlosti šikmého vrhu vzhľadom na bod vrhu A s vodorovnou osou  $x$  a zvislou  $y$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t, \quad (2)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4)$$

a) Pre bod dopadu na hornej ploche platí  $y_a = 0$  a  $x_a \leq a$

$$0 = v_0 t_a \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_a^2, \text{ odkiaľ } t_a = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

Po dosadení do (3)

$$x_a = v_0 t_a \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \leq a,$$

odkiaľ máme

$$\sin 2\alpha \leq \frac{g a}{v_0^2}.$$

Nerovnica má dva intervaly riešenia v rozsahu uhlov  $0$  až  $\pi/2$  rad

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{g a}{v_0^2} \right) = \alpha_d \quad \text{a} \quad \alpha_h = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{g a}{v_0^2} \right) \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad 1 \text{ b}$$

V prvom prípade ide o nízku trajektóriu, v druhom o vysokú trajektóriu.

Pre dané hodnoty  $0^\circ < \alpha \leq 12,9^\circ$  a  $77,1 \leq \alpha \leq 90^\circ$ . 1 b

b) Pre dopad na dno nádrže platí  $y_b = -b \sin \beta$  a  $x_b \geq a + b \cos \beta$

$$y_b = v_0 t_b \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_b^2 = -b \sin \beta \quad \text{a} \quad x_b = v_0 t_b \cos \alpha \geq a + b \cos \beta.$$

Rovnicu upravíme na tvar kvadratickej rovnice pre čas  $t_b$

$$t_b^2 - 2 \frac{v_0}{g} t_b \sin \alpha - \frac{2b}{g} \sin \beta = 0,$$

odkiaľ  $t_b = \frac{v_0}{g} \sin \alpha \pm \sqrt{\left( \frac{v_0}{g} \sin \alpha \right)^2 + \frac{2b}{g} \sin \beta}$  (pre  $t_b > 0$  má zmysel znamienko „+“).

Dosadením  $t_b$  do vzťahu pre  $x_b$  Podmienka dopadu na dno má tvar

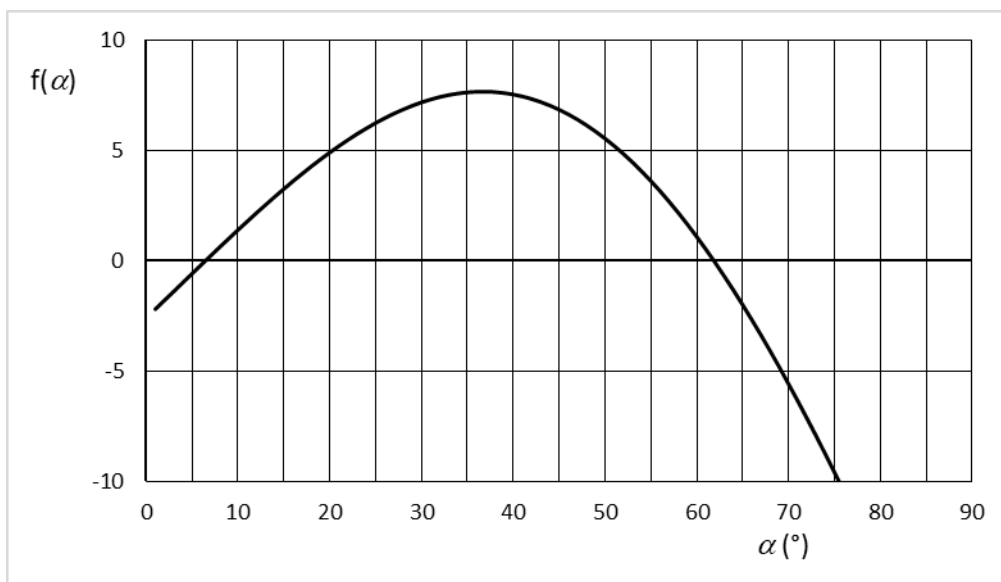
$$\frac{v_0^2}{g} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2b g \sin \beta}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right] \sin \alpha \cos \alpha \geq a + b \cos \beta. \quad 1 \text{ b}$$

Jedna z možností urobiť graf funkcie na ľavej strane a porovnať ho s hodnotou pravej strany. Druhá možnosť je definovať funkciu uhla  $\alpha$

$$f(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2bg \sin \beta}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right] \sin \alpha \cos \alpha - a - b \cos \beta \geq 0$$

graf hodnotiť podmienkou  $f(\alpha) \geq 0$ .

Zostrojíme graf funkcie  $f(\alpha)$



Obr. RA-1

Pre  $f(\alpha) = 0$  z grafu odčítame maximálnu hodnotu uhla  $\alpha_{\max} \approx 61,9^\circ$  a minimálnu hodnotu  $\alpha_{\min} \approx 6,5^\circ$ . Keďže hranica dopadu na hornú plochu je podľa časti a)  $\alpha_d \approx 12,9^\circ$ , loptička môže dopadnúť za hranu až pre uhly  $\alpha > \alpha_d$ . Druhé obmedzenie zhora nie je v konflikte, lebo  $\alpha_{\max} < \alpha_d$ . Teda podmienka dopadu na dno nádrže je  $12,9^\circ < \alpha < 61,9^\circ$ . 1 b

Maximálna vzdialenosť dopadu zodpovedá maximu funkcie  $f(\alpha)$ , tzn. z grafu  $\alpha_1 \approx 36,8^\circ$ . 1 b

Pre tento uhol

$$c = x_{b1} - (a + b \cos \beta) = \frac{v_0^2}{g} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2bg \sin \beta}{v_0^2 \sin^2 \alpha_1}} \right] \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - (a + b \cos \beta) .$$

Pre dané hodnoty  $c \approx 7,7$  m. 1 b

c) V bode D dopadu zvierá vektor rýchlosti vzhľadom na vodorovný smer  $x$  uhol  $-2\beta$ , preto platí

$$v_{xD} = v_D \cos 2\beta \quad \text{a} \quad v_{yD} = -v_D \sin 2\beta,$$

a teda

$$v_{xD} = v_0 \cos \alpha = v_D \cos 2\beta,$$

$$v_{yD} = v_0 \sin \alpha - g t_D = -v_D \sin 2\beta .$$

Ak označíme  $l$  dĺžku úsečky BD, pre súradnice bodu D máme

$$x_D = a + l \cos \beta = v_0 t_D \cos \alpha ,$$

$$y_D = -l \sin \beta = v_0 t_D \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D^2 .$$

Z uvedených rovníc dostávame po vylúčení  $l$  a  $t_D$  napr. rovnicu

$$\frac{\tan 2\beta + \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} (\tan 2\beta - 2 \tan \beta - \tan \alpha) + \frac{2ag}{v_0^2} \tan \beta = 0,$$

ktorá obsahuje jednu neznámu  $\alpha$ . Rovnicu upravíme na kvadratickú rovnicu pre  $\tan \alpha$

$$\tan^2 \alpha - 2 \frac{v_0^2 \tan \beta}{2ag \tan \beta - v_0^2} \tan \alpha + \frac{2ag \tan \beta + v_0^2 (\tan^2 2\beta - 2 \tan \beta \tan 2\beta)}{2ag \tan \beta - v_0^2} = 0,$$

ktorá má riešenie

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2 \tan \beta}{2ag \tan \beta - v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \tan \beta}{2ag \tan \beta - v_0^2}\right)^2 - \frac{2ag \tan \beta + v_0^2 \tan 2\beta (\tan 2\beta - 2 \tan \beta)}{2ag \tan \beta - v_0^2}}.$$

Pre dané hodnoty  $\tan \alpha \approx 1,98$  a  $-5,58$  (vyhovuje iba kladné riešenie), a teda  $\alpha_2 \approx 63,3^\circ$ . 1 b

Zo vzťahov pre  $x_D$  a  $y_D$  po vylúčení času  $t_D$  vyjadríme dĺžku  $l$ , napr. v tvare kvadratickej rovnice

$$l^2 + 2l \frac{a}{\cos \beta} \left(1 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_2}{ag} (\tan \beta + \tan \alpha_2)\right) + \frac{a^2}{\cos^2 \beta} \left(1 - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_2}{ag}\right) = 0$$

ktorá má riešenie

$$l = \frac{a}{\cos \beta} \left(1 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_2}{ag} (\tan \beta + \tan \alpha_2)\right) \left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - \frac{v_0^2}{ag} \sin 2\alpha_2}{\left(1 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_2}{ag} (\tan \beta + \tan \alpha_2)\right)^2}}\right].$$

Pre znamienka (-) a dané hodnoty  $l \approx 14,6$  m. 1 b

Rýchlosť určíme pomocou zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g l \sin \beta,$$

odkiaľ

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 g l \sin \beta},$$

pre dané hodnoty  $v_1 \approx 19,7$  m·s<sup>-1</sup>. 1 b

Loptička pokračuje vodorovným vrhom začiatčnou rýchlosťou  $v_1$  do hĺbky  $(b-l) \sin \beta$  a vodorovnej vzdialenosti  $(b-l) \cos \beta + d_1$ , pričom platí

$$(b-l) \cos \beta + d_1 = v_1 t_v \quad \text{a} \quad (b-l) \sin \beta = \frac{1}{2} g t_v^2,$$

odkiaľ po vylúčení času a úprave dostávame

$$d_1 = v_1 \sqrt{\frac{2(b-l) \sin \beta}{g}} - (b-l) \cos \beta,$$

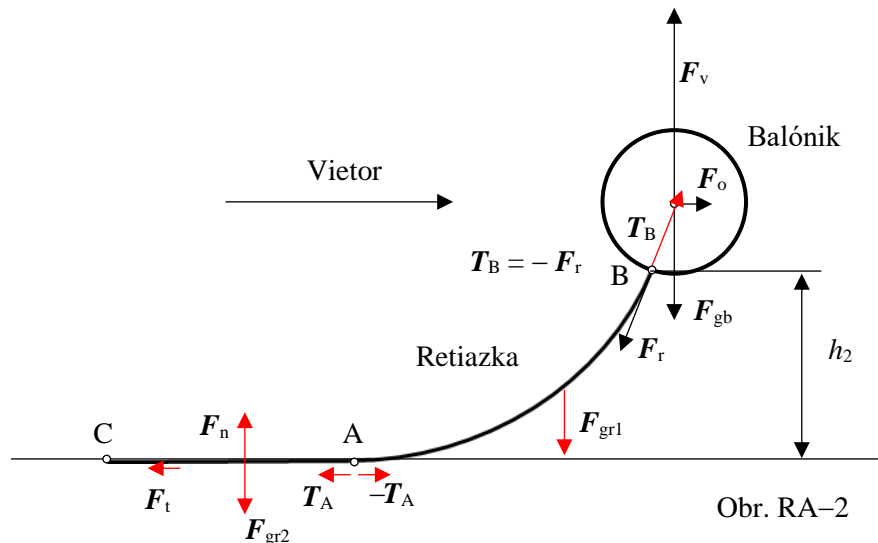
Pre dané hodnoty  $d_1 \approx 6,8$  m. 1 b

## 2) Balón na retiazke

Riešenie:

a) Obrázok

2 b



Na balónik pôsobia sily:  $F_v$  vztlaková sila,  $F_{gb}$  tiažová sila,  $F_o$  tlaková sila vetra,  $F_r$  ťahová sila retiazky.

Retiazka – úsek AB nad plochou:  $T_B$  ťahová sila balónika,  $F_{gr1}$  tiažová sila na úsek AB,  $T_A$  ťahová sila zvyšku retiazky.

Retiazka – úsek AC na ploche:  $-T_A$  ťahová sila retiazky (úseku AB),  $F_{gr2}$  tiažová sila úseku AC,  $F_n$  tlaková sila plochy,  $F_t$  sila trenia.

1 b

Vztlaková sila ťahá balónik nahor, v rovnovážnej polohe je vztlaková sila v rovnováhe s vlastnou tiažovou silou balónika a tiažovou silou retiazky visiacej nad plochou. Vietor tlačí balónik vo vodorovnom smere, takže balónik ťahá retiazku za sebou. Časť AB retiazky visí nad plochou, časť AC sa ťahá po ploche. Tlaková sila vetra je v rovnováhe so silou trenia časti AC retiazky na ploche. Pri malej rýchlosti vetra balónik stojí v rovnovážnej polohe a trenie na ploche je statické, pri väčšej rýchlosti sa balónik pohybuje rovnomerným pohybom v smere vetra a retiazku ťahá za sebou.

1 b

b) Keď pustili balónik vo vetre, začal sa pohybovať nahor a v smere vetra a ťahal za sebou retiazku. Pri maximálnej rýchlosti  $v_1$  sa na ploche natiahne postupne celý úsek AC retiazky, pričom sila trenia narastá, a pohyb balónika sa zastaví práve vtedy, keď je na ploche natiahnutý celý úsek AC retiazky. Časť AB retiazky svojou tiažovou silou  $F_{gr1}$  kompenzuje vztlakovú silu zmenšenú o tiažovú silu balónika  $F_v - F_{gb}$ . Tlaková sila vetra  $F_o = k v^2$  je prostredníctvom retiazky kompenzovaná silou trenia  $F_t \leq f F_n$  (známienka  $<$  platí pre statický prípad,  $=$  pre hranicu statického trenia a pre kĺzanie retiazky po ploche). Koeficient dynamického odporu určíme z údajov pri vypúšťaní balónika za bezvetria.

Za bezvetria pôsobí na balónik vztlaková sila  $F_v$  smerom nahor, tiažová sila  $F_{gb}$  a proti pohybu sila dynamického odporu vzduchu  $F_{o1} = -k u_1^2 y^0$ , kde  $k$  je koeficient dynamického odporu,  $y^0$  jednotkový vektor v smere zvislo nahor. Pri ustálenej rýchlosti platí

$$F_v - F_{gb} = F_o = k u_1^2.$$

Pri zavesenej retiazke pôsobí smerom nadol tiažová sila retiazky  $F_{gr} = h_1 \mu g$ . Pre statickú rovnováhu platí

$$F_v - F_{gb} = F_{gr} = h_1 \mu g.$$

Z týchto rovníc určíme koeficient dynamického odporu, ktorý budeme potrebovať pre výpočet tlakovej sily vetra

$$k = \frac{h_1 \mu g}{u_1^2}.$$

Keďže vietor pôsobí tlakovou silou vo vodorovnom smere, silové pomery v zvislom smere sa v porovnaní so stavom za bezvetria nezmenia, tzn. tiaž úseku AB retiazky je rovnaká ako za bezvetria, a teda hmotnosť úseku AB retiazky je  $\mu h$ . Hmotnosť časti AC ležiacej na ploche je  $(L - h) \mu$ . Medzná hodnota statického trenia  $F_{tm} = f (L - h) \mu g$ . Pre rovnováhu sústavy vo vodorovnom smere máme

$$f (L - h_1) \mu g = k v_1^2.$$

Odtiaľ maximálna rýchlosť vetra

$$v_1 = \sqrt{\frac{f (L - h_1) \mu g}{k}} = \sqrt{f \left( \frac{L}{h_1} - 1 \right)} u_1.$$

Pre dané hodnoty  $v_1 \approx 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2 b

c) S použitím opísaného modelu napíšeme rovnice rovnováhy síl vo vodorovnom a zvislom smere

$$(T + dT) \cos(\varphi + d\varphi) = T \cos \varphi,$$

$$(T + dT) \sin(\varphi + d\varphi) - T \sin \varphi = \mu g dl = \mu g \frac{dy}{\sin \varphi}.$$

Goniometrické funkcie súčtových uhlov rozložíme pomocou súčtových vzorcov a použijeme približné vzťahy

$$(T + dT)(\cos \varphi - d\varphi \sin \varphi) = T \cos \varphi$$

$$(T + dT)(d\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) = T \sin \varphi + \mu g \frac{dy}{\sin \varphi}.$$

Úpravou týchto rovníc dostávame

$$\frac{dT}{dy} = \mu g.$$

Veľkosť ťahovej sily rastie priamoúmerne s výškou, a teda

$$\frac{T_B - T_A}{h_2} = \mu g$$

V bode A je ťahová sila  $T_A$ , v bode B vo výške  $h_2$  je ťahová sila  $T_B$ , pričom platí

$$T_A = f (L - h_1) \mu g = h_1 \mu g \frac{v_1^2}{u_1^2} \quad \text{a} \quad T_B = \sqrt{(h_1 \mu g)^2 + \left( \frac{h_1 \mu g}{u_1^2} v_1^2 \right)^2}.$$

Hľadaná výška

$$h_2 = \frac{T_B - T_A}{\mu g} = \sqrt{h_1^2 + \left[ f (L - h_1) \right]^2} - f (L - h_1).$$

Pre dané hodnoty  $h_2 \approx 13 \text{ cm}$ .

2 b

- d) Ak sa rýchlosť vetra zvýši nad hodnotu  $v_1$ , zväčší sa odporová sila a balónik sa začne pohybovať v smere vetra. Vo zvislom smere sa sily nemenia, takže sa nemení ani dĺžka AC, a teda sila trenia  $F_t$ . K ustáleniu rýchlosti balónika dôjde, keď odporová sila poklesne na pôvodnú hodnotu

$$k(v_2 - u_2)^2 = k v_1^2, \text{ odkiaľ dostávame}$$

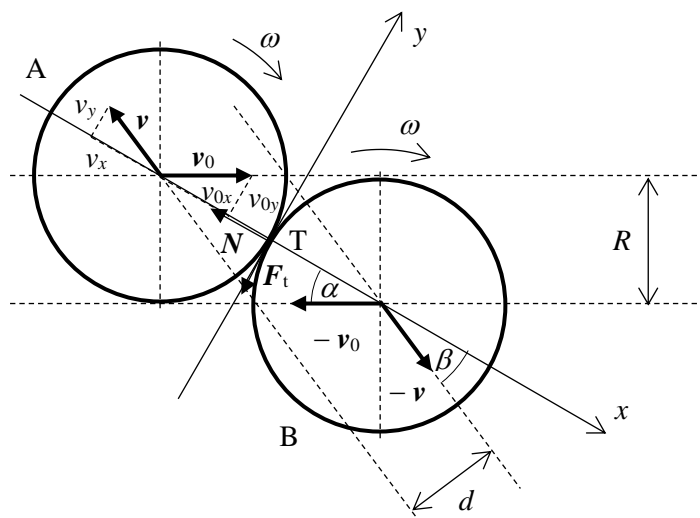
$$u_2 = v_2 - v_1 = v_2 - \sqrt{f \left( \frac{L}{h_1} - 1 \right)} u_1 \approx 0,49 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad 1 \text{ b}$$

Keďže sa nemení  $T_B$  ani  $T_A$ , nezmení sa ani výška balónika  $h_3 = h_2$ . 1 b

### 3) Zrážka krúžkov

*Riešenie:*

Na začiatku zrážky sa styčné plochy sotva dotýkajú, ale pohybujú sa voči sebe a klížu po sebe. Za predpokladu, že krúžky sa len málo deformujú (sú pevné), proces zrážky prebehne za veľmi krátky čas  $\Delta t$ , za ktorý sa krúžky posunú len o malú vzdialenosť  $\Delta s \ll R$ , preto môžeme uvažovať geometriu, ako pri bodovom dotyku krúžkov. Narastaním deformácie narastajú aj sily  $F_x(t)$  a  $F_y(t)$ , obr. RA-3, pôsobiace na styčných plochách, z ktorých  $F_y(t)$  predstavuje treciu silu roztáčajúcu krúžky okolo ich stredov. V začiatkovej fáze zrážky styčné plochy po sebe zaručene klížu, a naše úvahy začneme v tejto fáze zrážky.



Obr. RA-3

Situácia v okamihu zrážky (počas dotyku krúžkov) je znázornená na obr. RA-3. Keďže krúžky sú rovnaké, dej je symetrický vzhľadom na bod T dotyku krúžkov. Stačí teda sledovať iba jeden krúžok.

Pred zrážkou má krúžok A rýchlosť  $v_0$  a krúžok B rýchlosť  $-v_0$ . Nárazom sa rýchlosť krúžku A zmení na  $v$  a krúžku B na  $-v$ . Počas zrážky krúžky pôsobia na seba vzájomnou silou, ktorá má zložku normálovú (tlakovú, deformačnú) a tangenciálnu (treciu). V obrázku sú znázornené sily pôsobiace iba na krúžok A, na krúžok B pôsobia rovnako veľké sily opačného smeru. Pri šmyku sa krúžok A vychýľuje nahor a krúžok B nadol. Sila trenia  $F_t$  na krúžok A tak pôsobí smerom nadol (proti smeru relatívneho pohybu krúžkov). Vzhľadom na smer síl je vhodné zaviesť súradnicovú sústavu s osou  $x$  v smere normálovej sily, súčasne spojnice stredov krúžkov, a osi  $y$  kolmej na os  $x$ , rovnobežnej so silou trenia a dotykovou ku krúžkom v bode nárazu. Rýchlosť  $v_0$  zvierá s osou  $x$  uhol  $\alpha$ , daný vzťahom

$$\sin \alpha = \frac{R}{2R}, \text{ odkiaľ } \alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \text{ pozri obrázok.}$$

Nadalej budeme sledovať iba krúžok A. Rýchlosť  $v_0$  pred zrážkou rozložíme na zložky v smeroch osí

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha. \quad (1)$$

V dôsledku pôsobenia normálovej sily sa pri pružnou odraze krúžky odrazia nazad v smere pôsobiacej sily. Pôsobením trecej sily sa dotyčnicová zložka rýchlosti zmenší, ale zachová si pôvodný smer. Moment sily trenia súčasne vyvolá rotáciu krúžkov v naznačenom smere.

Vektor  $v$  rýchlosti krúžku A po zrážke má zložky  $v_x$  a  $v_y$ , ako je to naznačené v obrázku. S osou  $x$  zvierá uhol  $\beta$  daný vzťahom

$$\sin \beta = \frac{d}{2R}, \quad (2)$$

kde  $d$  je vzájomná vzdialenosť priamok, po ktorých sa pohybujú stredy krúžkov po zrážke.

*Správny opis 1 b*

- a) V smere osi  $x$  ide o pružnú stredovú zrážku, takže zložka rýchlosti  $v_x$  po zrážke je rovná zápornej zložke rýchlosti pred zrážkou, a teda

$$v_x = -v_0 \cos \alpha. \quad (3)$$

Impulz normálovej sily počas zrážky

$$I_x = -\int_0^{\Delta t} N dt = m v_x - m v_{0x} = -2m v_0 \cos \alpha. \quad (4)$$

(Prípadne  $I_x = -N \Delta t$ , kde  $N$  je stredná hodnota normálovej sily.)

V smere osi  $y$  pôsobí na krúžok počas zrážky trecia sila  $F_t = -fN$ . Tá spôsobí zmenu rýchlosti krúžku v smere osi  $y$  z hodnoty  $v_0 \sin \alpha$  na hodnotu  $v_y$ , pričom pre zmenu hybnosti platí

$$m v_y - m v_{y0} = I_y = \int_0^{\Delta t} F_t dt = -f \int_0^{\Delta t} N dt = f I_x. \quad (5)$$

Z (1) a (2) tak máme

$$v_y = v_{y0} + \frac{f I_x}{m} = v_0 \cos \alpha (\tan \alpha - 2f).$$

Výsledná rýchlosť stredov krúžkov po zrážke

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \sqrt{1 + 4f \cos^2 \alpha (f - \tan \alpha)} = v_0 \sqrt{1 - \sqrt{3} f + 3f^2}.$$

Pre dané hodnoty  $v \approx 46,3$  cm/s.

2 b

- b) V dôsledku pôsobenia trecej sily na obvode krúžkov dochádza k ich roztáčaniu, pričom pre moment hybnosti krúžka máme

$$L - L_0 = m R^2 \omega - 0 = \int_0^{\Delta t} R F_t dt = R I_y = R f I_x.$$

( $L = J \omega = m R^2 \omega$  je moment hybnosti vzhľadom na rotačnú os krúžka)

Po dosadení z (4) dostávame výslednú uhlovú rýchlosť po zrážke

$$\omega = -\frac{2f v_0 \cos \alpha}{R} = -\frac{\sqrt{3} f v_0}{R}.$$

Pre dané hodnoty  $\omega \approx 0,43$  s<sup>-1</sup>.

2 b

Smer otáčania je naznačený na obr. RA-3.

1 b

- c) Priamky pohybu stredov krúžkov, a teda smer vektora  $\mathbf{v}$  po zrážke, zvierajú so smerom osi  $x$  uhol  $\beta$ , pre ktorý platí vzťah

$$\tan \beta = -\frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin \alpha - 2f \cos \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha - 2f .$$

Pre vzdialenosť priamok, po ktorých sa pohybujú stredy krúžkov, tak dostávame

$$d = 2R \sin \beta = 2R \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = 2R \frac{\tan \alpha - 2f}{\sqrt{1 + (\tan \alpha - 2f)^2}} = R \frac{1 - 2\sqrt{3}f}{\sqrt{1 - \sqrt{3}f + 3f^2}} .$$

Pre dané hodnoty  $d \approx 14,1$  cm.

1 b

- d) Tretia sila pôsobí iba v prípade vzájomného šmykového pohybu povrchov krúžkov. Sila prestáva pôsobiť, ak obvodová rýchlosť  $\omega R$  rotácie dosiahne veľkosť tangenciálnej zložky rýchlosti posuvného pohybu  $v_y$ . Táto situácia nastane iba ak faktor trenia je väčší, než určitá hraničná hodnota  $f_m$ . Po dosadení a úprave

$$\tan \alpha = 4 f_m, \quad \text{resp.} \quad f_m = \frac{1}{4} \tan \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}} \approx 0,144 .$$

1 b

Maximálna hodnota  $\omega_m$  uhlovej rýchlosti pre faktor trenia  $f_m$  je

$$\omega_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{2R} = \frac{v_0}{4R} ,$$

a tangenciálnej zložky rýchlosti

$$v_{ym} = \omega_m R = \frac{v_0}{4} .$$

Pre faktor trenia  $f > f_m$  po dosiahnutí podmienky  $v_y = \omega R$  hodnoty rýchlosti  $v_{ym}$  a  $\omega_m$  zostávajú konštantné.

Pozn.: Na túto situáciu sa môžeme pozerat' aj tak, že pokiaľ povrchy krúžkov sa prestanú preklízať, potom dvojica krúžkov sa otáča ako celok. Zo zákona zachovania momentu hybnosti celého systému (vzhľadom na styčný bod krúžkov)  $J = mv_0 r = I_0 \omega_m$ , pričom moment zotrvačnosti celého systému (za predpokladu, že deformácia krúžkov je nepatrná)  $I_0 = 4mR^2$ . Odtiaľ priamo dostávame vyššie uvedený výsledok  $\omega_m = v_0/(4R)$ .

Môžeme získať aj hraničnú hodnotu  $f_m = \frac{1}{4} \tan \alpha$ , ak použijeme predtým odvodený vzťah pre veľkosť uhlovej rýchlosti, ktorý bude platiť aj pre medzný prípad  $f_m$ , pri ktorom  $\omega_m$ .

Pre tieto hraničné hodnoty je

$$\tan \beta = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

a minimálna vzdialenosť priamok pohybu stredov krúžkov po zrážke

$$d_m = R \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \alpha}} = \frac{2R}{\sqrt{13}} \approx 0,555 R .$$

Pre danú hodnotu polomeru  $d_m \approx 11,1$  cm.

1 b



- e) Teplo uvoľnené pri zrážke je rovné práci síl trenia. Jednoduchšie teplo určíme z úbytku kinetickej energie krúžkov

$$Q = 2E_{k0} - 2E_k = 2 \frac{1}{2} m v_0^2 - 2 \left[ \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \right].$$

Relatívne uvoľnené teplo

$$p = \frac{Q}{2E_{k0}} = 1 - \frac{E_k}{E_{k0}} = 1 - \frac{v^2 + R^2 \omega^2}{v_0^2},$$

a po dosadení

$$p = 1 - \frac{v^2 + R^2 \omega^2}{v_0^2} = (\sqrt{3} - 6f) f. \text{ Pre dané hodnoty } p \approx 11,3 \%.$$

Maximálna hodnota relatívneho tepla pre hodnoty  $f \geq f_m$

$$p_m = (\sqrt{3} - 6f_m) f_m = \frac{1}{8}, \text{ čo predstavuje } 12,5 \%. \quad 1 \text{ b}$$

#### 4) Elektrická tavná pec

*Riešenie:*

Horúci ingot (valec) kovu sa vloží do valcovej dutiny pece. Pri zohrievaní elektrickým prúdom sa zväčšujú rozmery a zároveň klesá hustota valca. Keď teplota dosiahne bod topenia, vyplní valec celý priemer pece. Pri roztápaní zostáva tekutá fáza v hornej časti nad pevnou, keďže má menšiu hustotu. Rozhranie medzi pevnou a kvapalnou fázou sa posúva nadol, až kvapalná tavenina vyplní celý objem pece. Počas roztápania kovu zostáva teplota konštantná a rovná teplote topenia.

So zmenou teploty sa menia všetky rozmery telesa. Pre priemer  $d$  a výšku  $h$  valca pri teplotách  $t_1$  a  $t$  máme

$$d_1 = d_0(1 + \alpha_L t_1) \quad \text{a} \quad d = d_0(1 + \alpha_L t), \text{ kde } d_0 \text{ je priemer valca pri teplote } t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C},$$

odkiaľ 
$$d = d_1 \left( \frac{1 + \alpha_L t}{1 + \alpha_L t_1} \right). \quad (1)$$

Rovnako pre výšku dostávame 
$$h = h_1 \left( \frac{1 + \alpha_L t}{1 + \alpha_L t_1} \right). \quad (2)$$

Pri rozpínaní telesa klesá jeho hustota. Keďže sa zväčšujú tri rozmery 3D telesa, platí

$$V = V_0(1 + \alpha_L t)^3, \text{ a teda } \rho = \frac{\rho_0}{(1 + \alpha_L t)^3} \quad \text{a} \quad \rho = \rho_1 \left( \frac{1 + \alpha_L t_1}{1 + \alpha_L t} \right)^3 \quad (3)$$

S teplotou sa mení aj odpor  $R$  vodivého kovového valca, pre ktorý platí  $R = \rho_R \frac{4h}{\pi d^2}$ , tzn.

$$R(t) = \rho_{R0} (1 + \alpha_R t) \frac{4h_1 \left( \frac{1 + \alpha_L t}{1 + \alpha_L t_1} \right)}{\pi d_1^2 \left( \frac{1 + \alpha_L t}{1 + \alpha_L t_1} \right)^2} = \rho_{R0} \frac{4h_1}{\pi d_1^2} \left( \frac{1 + \alpha_L t_1}{1 + \alpha_L t} \right) (1 + \alpha_R t). \quad (4)$$

- a) Najprv sa valec zohreje na teplotu topenia. Pre malú zmenu teploty  $dt$  za krátky čas  $d\tau$  dostávame

$$P d\tau = mc dt,$$

kde  $P = \frac{U_0^2}{R}$  je výkon zdroja a  $m = \rho_1 \frac{\pi d_1^2}{4} h_1 = \frac{\rho_0}{(1 + \alpha_L t_1)^3} \frac{\pi d_1^2}{4} h_1$  hmotnosť valca.

Diferenčná rovnica po dosadení dostane tvar

$$d\tau = \frac{R}{U_0^2} m c dt = \frac{\rho_R 4h}{U_0^2 \pi d^2} \rho \frac{\pi d^2 h}{4} c dt = \frac{\rho_{R0} \rho_0 h_1^2 c}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} \left( \frac{1 + \alpha_R t}{1 + \alpha_L t} \right) dt.$$

Integráciou tejto rovnice dostávame

$$\tau_1 = \frac{\rho_{R0} \rho_0 h_1^2 c}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 + \alpha_R t}{1 + \alpha_L t} dt = \frac{\rho_{R0} \rho_0 h_1^2 c}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} \left[ \frac{\alpha_R}{\alpha_L} (t_2 - t_1) - \frac{\alpha_R - \alpha_L}{\alpha_L^2} \ln \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} \right].$$

Pre dané hodnoty  $\tau_1 \approx 58,1$  s.

2 b

Možno však použiť aj približné riešenie. Pre maximálnu teplotu do  $660^\circ\text{C}$  je  $\alpha_R t_2 = 2,64$  a  $\alpha_L t_2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$ . Pre účel zjednodušenia integrovanej funkcie slabú teplotnú závislosť rozmerov v menovateli zanedbáme v porovnaní s výraznou teplotnou závislosťou rezistivity v čitateli.

Po zanedbaní teplotnej závislosti rozmerov dostávame zjednodušenú rovnicu

$$d\tau \approx \frac{\rho_{R0} \rho_0 h_1^2 c}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} (1 + \alpha_R t) dt.$$

Jej integráciou dostávame

$$\int_0^{\tau_1} d\tau = \frac{\rho_{R0} \rho_0 h_1^2 c}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} (1 + \alpha_R t) dt, \text{ resp. } \tau_1 = \frac{\rho_{R0} \rho_0 h_1^2 c}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} \left[ t_2 - t_1 + \alpha_R \frac{1}{2} (t_2^2 - t_1^2) \right]$$

a po úprave

$$\tau_1 = \frac{\rho_0 h_1^2 c \rho_{R0}}{U_0^2 (1 + \alpha_L t_1)^2} (t_2 - t_1) \left[ 1 + \frac{\alpha_R}{2} (t_2 + t_1) \right] \quad (5)$$

Pre dané hodnoty  $\tau_1 \approx 58,7$  s.

Vidíme, že približný výpočet vedie na málo odlišnú hodnotu (1 %).

Pri dosiahnutí teploty topenia vyplní valec celý priemer pece a začne sa meniť skupenstvo na kvapalnú pri konštantnej teplote. Keďže hustota taveniny  $\rho_{2k}$  je menšia ako hustota tuhej fázy  $\rho_2$ , vrstva taveniny sa vytvára nad pevným telesom.

Keď sa mení hrúbka  $x$  roztopenej vrstvy, mení sa aj odpor medzi elektródami. Hmotnosť kvapalnej vrstvy

$$m_x = \rho_{2k} \frac{\pi d_2^2}{4} x.$$

Neroztopená časť pevného valca má výšku  $y$  a hmotnosť

$$m_y = m - m_x = \rho_2 \frac{\pi d_2^2}{4} y,$$

odkiaľ máme  $y = \frac{\rho_1 d_1^2}{\rho_2 d_2^2} h_1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_2} x$ , resp.  $y = \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 x$ . (6)

Pre zmenu hrúbky  $dx$  platí rovnica skupenskej premeny

$$\frac{U_0^2}{R} d\tau = dm l_t = \rho_{2k} \frac{\pi d_2^2}{4} dx l_t, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
R &= \rho_{R0} (1 + \alpha_R t_2) \frac{4y}{\pi d_2^2} + \rho_{Rk} \frac{4x}{\pi d_2^2} = \\
&= \rho_{R0} \frac{4}{\pi d_2^2} \left[ (1 + \alpha_R t_2) \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 + \left( \frac{\rho_{Rk}}{\rho_{R0}} - \frac{\rho_{2k}}{\rho_2} (1 + \alpha_R t_2) \right) x \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Po dosadení a úprave

$$d\tau = \frac{\rho_{2k} \rho_{R0} l_t}{U_0^2} \left[ (1 + \alpha_R t_2) \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 + \left( \frac{\rho_{Rk}}{\rho_{R0}} - \frac{\rho_{2k}}{\rho_2} (1 + \alpha_R t_2) \right) x \right] dx \quad (8)$$

Rovnicu integrujeme pre hrúbku vrstvy od 0 do  $h_3$ , kde  $h_3$  je výška stĺpca kvapalnej fázy po roztopení celého telesa. Pri zohrievaní a roztopení kovu sa hmotnosť kovu nemení, preto platí

$$m = \rho_1 \frac{\pi d_1^2}{4} h_1 = \rho_2 \frac{\pi d_2^2}{4} h_2 = \rho_{2k} \frac{\pi d_2^2}{4} h_3, \quad (9)$$

odkiaľ dostávame

$$h_3 = \frac{\rho_0}{\rho_{2k}} \frac{1}{(1 + \alpha_L t_1)(1 + \alpha_L t_2)^2} h_1. \quad (10)$$

Po dosadení do (7) a integrácii máme

$$\tau_2 = \frac{\rho_{2k} \rho_{R0} l_t}{U_0^2} \left[ (1 + \alpha_R t_2) \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 h_3 + \left( \frac{\rho_{Rk}}{\rho_{R0}} - \frac{\rho_{2k}}{\rho_2} (1 + \alpha_R t_2) \right) \frac{h_3^2}{2} \right]$$

a po dosadení za  $h_3$  a úprave

$$\tau_2 = \frac{\rho_{R0} \rho_0 l_t h_1^2}{U_0^2} \frac{(1 + \alpha_R t_2)}{(1 + \alpha_L t_1)^2 (1 + \alpha_L t_2)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_0 \rho_{Rk}}{\rho_{2k} \rho_{R0}} \frac{1}{(1 + \alpha_L t_2)^3 (1 + \alpha_R t_2)} - 1 \right) \right] \quad 2b$$

Pre dané hodnoty  $\tau_2 \approx 134 \text{ s} = 2 \text{ min } 14 \text{ s}$ .

- b) Na začiatku sa uplatní iba dĺžková teplotná rozťažnosť pevného telesa. Počas zohrievania telesa sa horná elektróda posunie nahor z výšky  $h_1$  do výšky  $h_2$  (2), a teda posunutie

$$\delta_1 = h_2 - h_1 = \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 - h_1 = h_1 \frac{\alpha_L (t_2 - t_1)}{1 + \alpha_L t_1}.$$

Keďže kvapalná vrstva nevzniká, je  $x = 0$ , pričom posunutie  $\delta_1 \approx 2,6 \text{ cm}$ .

Po vzniku kvapalnej vrstvy s hrúbkou  $x$  je celková výška hladiny, pozri (6),

$$x + y = x + \frac{\rho_1 d_1^2}{\rho_2 d_2^2} h_1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_2} x = \frac{\rho_1 d_1^2}{\rho_2 d_2^2} h_1 + \left( 1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_2} \right) x$$

a po dosadení z (1) a (3)

$$x + y = \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 + \left( 1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right) x$$

Posunutie horného povrchu vplyvom roztápania kovu

$$\delta_2 = (x + y) - h_2 = \frac{1 + \alpha_L t_2}{1 + \alpha_L t_1} h_1 + \left( 1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right) x - h_2 = \left( 1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right) x$$

Celkové posunutie horného piestu ako funkcia hrúbky tekutej vrstvy  $x$

$$\delta = \delta_1 + (x + y) - h_2 = \delta_1 + \left( 1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right) x. \quad 2b$$

Pre roztopenie celého pevného telesa  $x = h_3$ , a teda

$$\delta_m = \delta_1 + \left( 1 - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right) h_3 = h_3 - h_1 = \left( \frac{\rho_0}{\rho_{2k}} \frac{1}{(1 + \alpha_L t_1)(1 + \alpha_L t_2)^2} - 1 \right) h_1.$$

Pre dané hodnoty  $\delta_m \approx 23,9$  cm.

1 b

c) Výkon zdroja  $P = \frac{U_0^2}{R}$ .

V prípade zohrievania pevného valca sa uplatňuje iba teplotná závislosť odporu telesa (4)

$$P = \frac{U_0^2}{R} = \frac{\pi d_1^2 U_0^2}{4 h_1 \rho_{R0}} \left( \frac{1 + \alpha_L t}{1 + \alpha_L t_1} \right) \frac{1}{1 + \alpha_R t} \quad \text{pre } 200^\circ\text{C až } 660^\circ\text{C a } x = 0.$$

Pre teploty  $t_1 = 200^\circ\text{C}$  a  $t_2 = 660^\circ\text{C}$  sú výkony  $P_1 \approx 80,2$  MW,  $P_2 \approx 40,1$  MW.

1 b

Keď sa začne pevné teleso topiť, narastá hrúbka  $x$  tekutej vrstvy. Zo vzťahu (7) po dosadení a úprave dostávame odpor kovu v peci

$$R = \rho_{R0} \frac{4 h_1}{\pi d_1^2} \left( \frac{1 + \alpha_L t_1}{1 + \alpha_L t_2} \right) (1 + \alpha_R t_2) \left[ 1 + \frac{1 + \alpha_L t_1}{1 + \alpha_L t_2} \left( \frac{\rho_{Rk}}{\rho_{R0} (1 + \alpha_R t_2)} - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right) \frac{x}{h_1} \right]$$

Zápis možno zjednodušiť na tvar

$$R = R_2 (1 + r x),$$

kde  $R_2 = \rho_{R0} \frac{4 h_1}{\pi d_1^2} \left( \frac{1 + \alpha_L t_1}{1 + \alpha_L t_2} \right) (1 + \alpha_R t_2)$  a  $r = \frac{1}{h_1} \frac{1 + \alpha_L t_1}{1 + \alpha_L t_2} \left( \frac{\rho_{Rk}}{\rho_{R0} (1 + \alpha_R t_2)} - \frac{\rho_{2k}}{\rho_0} (1 + \alpha_L t_2)^3 \right)$

pre dané hodnoty  $R_2 \approx 2,25 \cdot 10^{-7} \Omega$ ,  $r = 0,580 \text{ m}^{-1}$

Výkon je potom

$$P = \frac{U_0^2}{R_2 (1 + r x)} = P_2 \frac{1}{1 + r x}.$$

1 b

V okamihu roztopenia všetkého kovu je  $x = h_3$ , pozri (10), a zodpovedajúci výkon

$$P_3 = \frac{U_0^2}{R_2 (1 + r h_3)} = P_2 \frac{1}{1 + r h_3} = P_2 \frac{1}{1 + r h_1 \frac{\rho_0}{\rho_{2k}} \frac{1}{(1 + \alpha_L t_2)^2 (1 + \alpha_L t_1)}}.$$

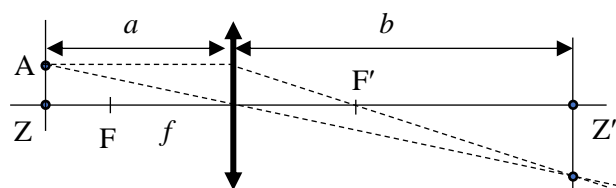
Pre dané hodnoty  $P_3 \approx 15,5$  MW.

1 b

## 5) Kývajúca sa šošovka

Riešenie:

- a) Keďže bodový predmet Z je na optickej osi, zvolíme pre konštrukciu obrazu bod A v predmetovej rovine mimo optickej osi. Zostrojíme obraz A', ktorý určí obrazovú rovinu obsahujúcu v priesečníku s optickou osou obraz Z'. Pre predmetovú vzdialenosť  $a_0$  a obrazovú  $b_0$  platí zobrazovacia rovnica

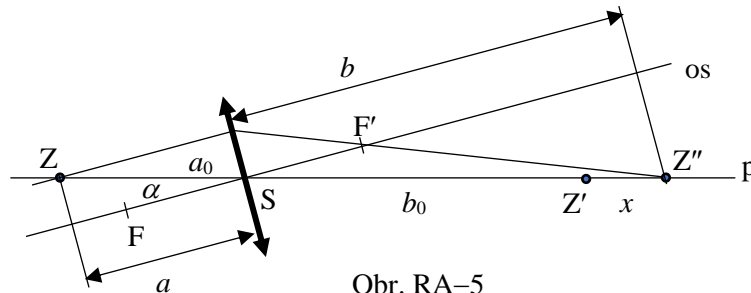


Obr. RA-4

obrázok 1 b

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{f}, \text{ odkiaľ dostávame } b_0 = \frac{a_0 f}{a_0 - f}. \text{ Pre dané hodnoty } b_0 \approx 67 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

b)



Obr. RA-5

obrázok 1 b

Po vychýlení šošovky sa vychýli jej os a zdroj Z sa dostane mimo optickú os šošovky. Predmetová vzdialenosť sa zmení na  $a = a_0 \cos \alpha$ . Pre obrazovú vzdialenosť platí  $b = (b_0 + x) \cos \alpha$ .

Konštrukcia obrazu je znázornená na obr. RA-2. Je zrejmé, že obraz zdroja sa posunie po priamke p.

Pre zobrazenie zdroja platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ po dosadení } \frac{1}{a_0 \cos \alpha} + \frac{1}{(b_0 + x) \cos \alpha} = \frac{1}{f}.$$

Odtiaľ dostaneme

$$x = \frac{a_0^2 f}{a_0 - f} \frac{1 - \cos \alpha}{a_0 \cos \alpha - f}. \text{ Pre dané hodnoty } x \approx 6,7 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

Vypočítaná hodnoty zodpovedá výsledku získanému grafickou konštrukciou.

c) Najprv vzťah pre posunutie  $x$  upravíme napr. na tvar

$$x = \frac{a_0^2 f}{a_0 - f} \frac{1 - \cos \alpha}{a_0 \cos \alpha - f} = \frac{a_0^2 f}{a_0 - f} \frac{2 \frac{1 - \cos \alpha}{2}}{a_0 \cos \alpha - f} = \frac{a_0^2 f}{a_0 - f} \frac{2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}{a_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - f}$$

a po uplatnení približného vzťahu pre veľmi malý uhol  $\alpha$  máme

$$x = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \alpha^2 = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \alpha_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \frac{\alpha_m^2}{2} (1 - \cos 2\omega t). \quad 1 \text{ b}$$

Rýchlosť je rovná časovej derivácii posunutia

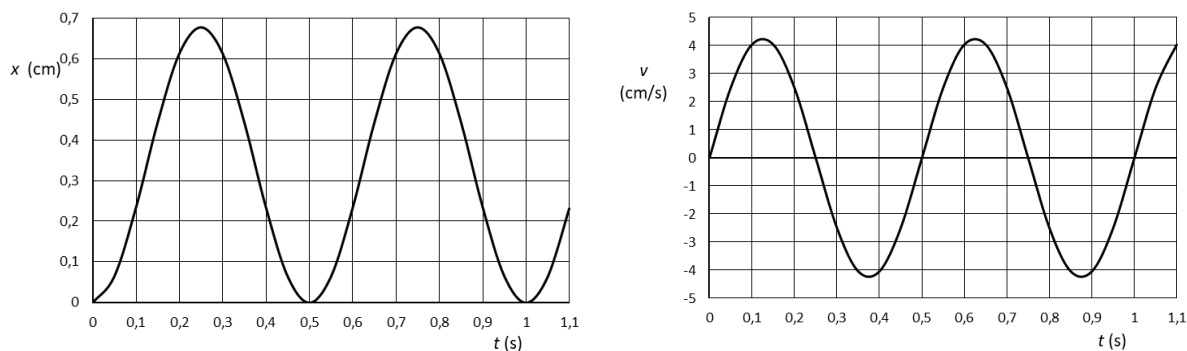
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \alpha_m^2 (\sin^2 \omega t)' = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \alpha_m^2 (2 \sin \omega t) (\cos \omega t) \omega$$

a po úprave

$$v = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \omega \alpha_m^2 \sin 2\omega t. \quad 1 \text{ b}$$

Ako vidíme, obidve funkcie sú harmonické s dvojnásobnou frekvenciou.

Grafy odvodených funkcií:



obrázky 1 b

- d) Perióda kmitov šošovky  $T \approx 1,0$  s. Ako vidíme, výchylka i rýchlosť majú polovičnú periódu.

Minimálna hodnota výchylky  $x_1 = 0$ , tzn. obraz  $Z''$  sa vychyluje od  $Z'$  iba na jednu stranu  $x > 0$ .

Maximálna výchylka

$$x_2 = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \alpha_m^2, \text{ pre dané hodnoty } x_2 \approx 0,68 \text{ cm.} \quad 1 \text{ b}$$

(Pozn.: uhol treba dosadiť v radiánoch).

Rýchlosť sa mení harmonicky okolo nulovej hodnoty, tzn.

$$v_1 = -v_2 = \frac{a_0^2 f}{2(a_0 - f)^2} \omega \alpha_m^2. \text{ Pre dané hodnoty } v_1 = -v_2 \approx 4,25 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}. \quad 1 \text{ b}$$

Extrémy rýchlosti zodpovedajú času  $t_1 = (1/4) T$  a  $t_2 = (3/4) T$ , čo zodpovedá extrémnym uhlom

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_m = 5^\circ. \quad 1 \text{ b}$$

## 6) Žiarenie Vavilova – Čerenkova

Riešenie:

- a) Vo vode sa svetlo šíri rýchlosťou  $v_s = c/n$ , čo je minimálna rýchlosť elektrónov pre vznik V-Č javu. Rýchlosť  $v_e$  elektrónov na výstupe urýchľovača určíme zo zmeny kinetickej energie elektrónov

$$(m_r - m)c^2 = eU, \text{ kde } m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}.$$

Ak uvážime minimálnu rýchlosť  $v_{e \min} = v_s = c/n$ , je potrebné napätie

$$U_{\min} = \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) \frac{m c^2}{e}. \text{ Pre dané hodnoty } U_{\min} \approx 265 \text{ kV.} \quad 2 \text{ b}$$

Hybnosť elektrónov s rýchlosťou  $v_{e \min}$  je

$$p_m = m_r v_{e \min} = \frac{m c}{\sqrt{n^2 - 1}}. \text{ Pre dané hodnoty } p_m \approx 3,11 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad 2 \text{ b}$$

a energia elektrónov

$$E_m = m_r c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}. \text{ Pre dané hodnoty } E_m \approx 1,24 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 776 \text{ keV.} \quad 2 \text{ b}$$

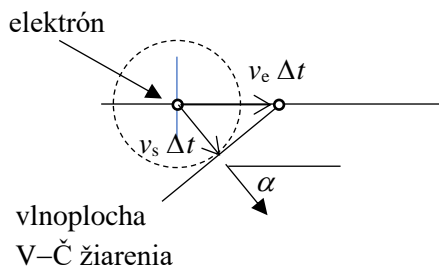
- b) Pre energiu  $E = k E_m$  určíme rýchlosť pohybu elektrónov zo vzťahu

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} - 1 \right) m c^2 = k \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) m c^2,$$

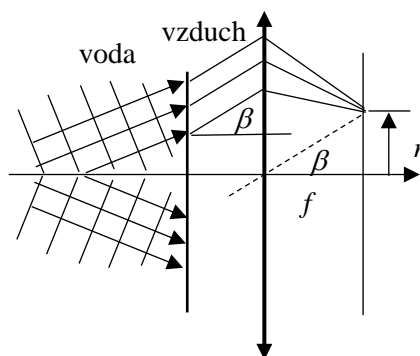
odkiaľ dostávame

$$v_e = c \sqrt{1 - \frac{n^2 - 1}{\left[ \sqrt{n^2 - 1} + k \left( n - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right]^2}}.$$

Pre dané hodnoty  $v_e \approx 0,87 c \approx 2,61 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 2 b



Obr. RA-6



Obr. RA-7

Na obr. RA–6 je znázornený vznik kužeľa svetla. Za dobu  $\Delta t$  svetlo prejde vzdialenosť  $v_s \Delta t$ , zatiaľ čo elektrón vzdialenosť  $v_e \Delta t$ . Normála vlnoplochy svetla tak zvierá so smerom pohybu elektrónu uhol  $\alpha$ , pre ktorý platí

$$\cos \alpha = \frac{v_s}{v_e}, \text{ resp. } \alpha = \arccos \frac{v_s}{v_e}.$$

Na obr. RA–2 vidíme dopad svetelnej vlny na rozhranie voda–vzduch pod uhlom  $\alpha$ . Na rozhraní sa svetlo láme pod uhlom  $\beta$ , pre ktorý platí  $\sin \beta = n \sin \alpha$ . Zväzok rovnobežných lúčov dopadá pod uhlom  $\beta$  na šošovku a láme sa do bodu v ohniskovej rovine. Ak vedieme rovnobežku s lúčmi dopadajúcimi na šošovku, ktorá prechádza stredom šošovky (na obr. RA–7 prerušovanou čiarou), jej priesečník s ohniskovou rovinou určuje bod do ktorého sa lámu lúče po prechode šošovkou. Keďže je sústava osovo symetrická okolo optickej osi, z bodov zaostrenia vzniká kružnicová stopa s polomerom  $r = f \tan \beta$ .

Na tienidle tak vzniká kružnica s polomerom

$$r = f \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = f \frac{n \sin \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} = f \frac{n \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 - n^2 (1 - \cos^2 \alpha)}} = f \frac{n \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{v_e^2}}}{\sqrt{1 - n^2 \left(1 - \frac{v_s^2}{v_e^2}\right)}}.$$

Po dosadení a úprave

$$r = f \sqrt{\frac{(n^2 - 1) \left[ \sqrt{n^2 - 1} + k (n - \sqrt{n^2 - 1}) \right]^2 - n^2 (n^2 - 1)}{(1 - n^2)^2 - (n^2 - 2) \left[ \sqrt{n^2 - 1} + k (n - \sqrt{n^2 - 1}) \right]^2}}.$$

Pre dané hodnoty  $r \approx 13,6$  cm.

2 b

## 7) Žiarenie vlákna žiarovky – experimentálna úloha

Podľa úrovne spracovania 0 – 10 b

---

### 63. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori návrhov úloh:	Lubomír Konrád (1 až 6), Ivo Čáp (7)
Recenzia:	Aba Teleki, Lubomír Mucha
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021